東京大学 2026 年度 A セメスター 数理科学特別講義 V

第 4 日 講義補足ノート

有効因子の半正性と近傍の解析構造

小池 貴之（筑波大学）　2026 年 10 月 29 日

本稿は第 4 日の板書講義に沿って定義・主張・証明を整理し, 講義で省略した詳細を「補足」に記したものである. もととなる板書原稿は著者が手書きで用意したものであり, 本稿はその原稿を ChatGPT に読み取らせ, 講義ノート [LN] との照合のうえ, 講義で説明しきれなかった詳細を受講者が講義ノートで確認できるよう, 適宜補足と参照を付す作業を依頼して作成した. 講義で述べた数学的内容と講義ノートの記載については著者自身が確認しているが, 本稿の書き起こし・補足・参照の作成は大部分を ChatGPT に委ねている. 本稿についても著者が一部を確認・修正し, 確認した範囲では問題ないと判断して公開しているものの, 全体を逐一検証したものではない. 書き起こしや補足・参照の細部には誤りが残っている可能性があることに留意されたい.

主定理の証明は概略とする. 以下,「講義ノート」は *Complex Analytic Geometry and Dynamics on Analytic Neighborhood Spaces*, **Version 1.1（2026 年 10 月 28 日）**[LN] である. ローマ数字で始まる定理・命題・補題・定義の番号と,「講義ノートの式」と明記した番号は, すべてこの版の番号を指し, 本稿自身の番号とは区別する.

1　多重劣調和函数の存在を問う

第 2 日までは, 与えられた複素多様体上に適切な多重劣調和函数が存在する状況を主に扱ってきた. 第 3 日の近傍の解析構造の議論を踏まえ, 第 4 日では, 幾何学的な条件からそのような函数の存在や非存在をどのように示すかを考える.[*1] 有効因子が定める正則直線束の曲率を通して, 多重劣調和函数と近傍の構造を結びつけることが目標である. まず, 講義の出発点となる二つの設定を挙げる.

1.1　曲面内のコンパクト曲線と自己交点数

X を連結コンパクト複素曲面, $Z \subset X$ を正則に埋め込まれたコンパクト Riemann 面とする. その法束を $N_{Z/X}$ と書くと, 自己交点数は

$$(Z^2) = \deg N_{Z/X}$$

で与えられる. 実際, $N_{Z/X} \simeq [Z]|_Z$ である（講義ノートの例 III.2.145; 因子に対応する直線束 $[Z]$ は次節で定義する）.

[*1] 第 1 日に Levi 問題に関連して説明したように, 十分な量や種類の正則函数の存在があらかじめ分かっている状況では, それらを活用して多重劣調和な exhaustion 函数などを構成しやすい. ここで問うのは, 擬凸性の観点からより微妙な状況での存在・非存在である.

(i) $(Z^2) > 0$ の場合. このとき X は射影代数的であり, $X \setminus Z$ はアフィン曲面への固有改変である.[*2] また, $X \setminus Z$ は強 1-凸である.[*3] これは [KU, Corollary 5.1 およびその直前の議論] の, 曲線が非特異かつ既約な場合に当たる. 講義ノートの系 V.5.7 とその証明, ならびに収縮の一般論について講義ノートの定理 III.2.183, 講義ノートの注意 III.2.184 も参照されたい.

(ii) $(Z^2) < 0$ の場合. Z は強擬凸な近傍からなる基本近傍系を持ち, 各近傍は強 1-凸である（Grauert の結果および Grauert–Mumford の収縮判定: [G], [R, Chapter 9, §9.8, Theorem 9.14]; 講義ノート §V.5.1 も参照）. これに対し, コンパクト曲面から Z を除いた $X \setminus Z$ は弱 1-完備にはならない.

(iii) $(Z^2) = 0$ の場合. 自己交点数だけでは近傍の函数論は決まらない. 第 3 日に扱った上田理論の諸現象が, この場合に現れる.

1.2 領域の多重劣調和な定義函数

もう一つの設定は, 複素多様体 X 内の局所擬凸な領域 Ω である. 局所擬凸性は, 各境界点に座標近傍 V を取り, $V \cap \Omega$ が擬凸となるという局所的な条件である（講義ノート §III.2.10）. これを踏まえ, Ω を定める函数自体を多重劣調和に選べるかを問う.

C^∞ 境界を持つ領域の定義函数とは, 境界近傍 V 上の C^∞ 実数値函数 ρ で,

$$\Omega \cap V = \{x \in V \mid \rho(x) < 0\}, \qquad \partial\Omega = \{x \in V \mid \rho(x) = 0\}, \qquad (d\rho)_p \neq 0 \quad (p \in \partial\Omega)$$

を満たすものである. 強 1-完備な領域であっても, 定義函数を境界近くで多重劣調和に選べるとは限らない. 以下の定理は, その違いを明確に示す.

定理 1.1 (Nemirovski [Nem, Proposition 2 およびその直後の系])**.** X を複素曲面, $\Omega \Subset X$ を相対コンパクトな強 1-完備領域とし, $\partial\Omega$ は非空で C^∞ かつ Levi 平坦であるとする. ρ を $\overline{\Omega}$ の近傍で定義された Ω の C^∞ 定義函数とする. このとき, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して, $\rho|_{\Omega \setminus K}$ は多重劣調和ではない.

証明. あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して $\rho|_{\Omega \setminus K}$ が多重劣調和であると仮定する. $\partial\Omega$ のコンパクト性と $d\rho \neq 0$ より, 十分小さい管状近傍 V と $\varepsilon > 0$ を取り,

$$M_t := \{x \in V \mid \rho(x) = t\} \qquad (-\varepsilon < t \leq 0)$$

がコンパクトな C^∞ 実超曲面となるようにできる. ここで $M_0 = \partial\Omega$ であり, $t < 0$ なら $M_t \subset \Omega \setminus K$ となるように V を選ぶ. 各 M_t には $\rho < t$ 側の境界としての向きを入れる.

以下では講義ノートと同じ正規化

$$d^c = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial}), \qquad dd^c = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}$$

[*2] 射影代数的とは, ある複素射影空間内で有限個の斉次多項式の共通零点集合として実現できることをいう. 射影空間への正則埋め込みとの関係は, 講義ノートの定理 III.2.172（Chow の定理）とその前後の説明を参照されたい.

[*3] 講義ではモデルケースとして, $X = \mathbb{P}^2$ で Z が無限遠直線の場合を挙げた. このとき $X \setminus Z \simeq \mathbb{C}^2$ であり, $|z_1|^2 + |z_2|^2$ が C^∞ 強多重劣調和 exhaustion 函数となるので, 補集合は強 1-完備である.

を用いる. この正規化で, 次の函数 F を定める.

$$F(t) := \int_{M_t} d^c\rho \wedge dd^c\rho \qquad (-\varepsilon < t \leq 0).$$

まず $F(t) \geq 0$ を確かめる. X 上に補助的な Hermitian 計量を選び, ρ の増加する側を向く M_t の実単位法線を ν とする. J を複素構造とすると, $J\nu$ は M_t に接し,

$$(d^c\rho)(J\nu) = -\frac{1}{4\pi}(d\rho)(J^2\nu) = \frac{1}{4\pi}(d\rho)(\nu) > 0.$$

また, 複素接空間 $HM_t := TM_t \cap J(TM_t)$ 上では $d^c\rho = 0$ である. $J\nu$ の方向に続けて HM_t の複素向きを取ると, これは M_t の境界向きになる. ρ の多重劣調和性により $dd^c\rho$ の HM_t への制限は半正なので, $d^c\rho \wedge dd^c\rho$ はこの向きに関して非負である. 境界 $t = 0$ についても連続性により同じことがいえる. これらの関係は講義ノートの小演習 III.1.16(i), (iii) にも記されている.

次に, $-\varepsilon < t < s \leq 0$ に対して Stokes の公式を用いると,

$$\begin{aligned} F(s) - F(t) &= \int_{\{x \in V \mid t < \rho(x) < s\}} d(d^c\rho \wedge dd^c\rho) \\ &= \int_{\{x \in V \mid t < \rho(x) < s\}} (dd^c\rho)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

ここで積分領域の閉包は V 内でコンパクトであり, その境界は向きも含めて $M_s \sqcup (-M_t)$ である. 従って F は広義単調増加である.

$M_0 = \partial\Omega$ が Levi 平坦なので $F(0) = 0$ である. 以上から

$$0 \leq F(t) \leq F(0) = 0 \qquad (-\varepsilon < t \leq 0)$$

となる. 各 M_t 上の被積分形式は接方向の Levi 形式の正の倍に当たる非負密度だから, 積分が 0 であることから Levi 形式は各点で消える. 従って全ての M_t が Levi 平坦である.

$t < 0$ を一つ固定する. 強 1-完備な Ω 上の C^∞ 強多重劣調和 exhaustion 函数を取り, その M_t 上での最大値を実現する点を p とする. p を通る Levi 葉に制限すると, 強劣調和函数が内点 p で局所最大値を取ることになり, 最大値原理に反する. □

補足 1.2 (講義ノートの定理との対応)**.** 講義ノートの定理 III.2.191 では, コンパクト Levi 平坦境界の両側の近傍上で多重劣調和な定義函数が存在しないという形で述べられている. 上の証明は境界の内側の正則レベルとその間の領域だけを用いているため, 講義で用いた定理 1.1 の形にもそのまま適用できる. Levi 平坦性から Levi 葉層を得る点については, 講義ノートの小演習 III.1.16(iv) とその直後の説明を参照されたい.

2 因子とそれに対応する正則直線束

ここからは最初の設定へ戻り, 因子が定める正則直線束の半正性と, その台の近傍の函数論との関係を考える. この節では, 因子・局所定義函数・対応する直線束の規約を揃える. 以下, X は複素多様体とする.

2.1 複素超曲面と因子

定義 2.1 (複素超曲面)**.** 純余次元 1 の閉解析的集合 $Z \subset X$ を複素超曲面という．各点の十分小さい連結近傍 U 上では, 恒等的に 0 ではない正則函数 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ を用いて

$$Z \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

と書ける（講義ノートの定義 III.2.51, 講義ノートの命題 III.2.60）.

非空な複素超曲面が, それぞれ全体より真に小さい二つの閉解析的部分集合の和集合としては表せないとき, 既約という．直観的には, これ以上複数の複素超曲面に分けられないことを意味する．正確な定義は講義ノートの定義 III.2.39 を参照されたい.

補足 2.2 (重複を持たない局所定義函数)**.** 超曲面 Z の消滅イデアル層を $\mathcal{I}_Z$ と書く.[*4] 上の f は, さらに $\mathcal{I}_Z|_U = f\mathcal{O}_U$ を満たすように選べる．Weierstraß の予備定理から局所環 $\mathcal{O}_{X,p}$ が UFD であることが分かるので, 重複度は一変数の場合と同じく, 素因子の指数として捉えればよい（講義ノートの定理 III.1.29, 講義ノートの定理 III.1.33）．上の f の芽は局所既約枝を定める相異なる既約函数芽の積に単元を掛けたものであり, 各枝は重複度 1 で現れる．この意味で f を Z の局所定義函数と呼ぶ．これは特異点でも $df \neq 0$ という意味ではなく, 特異点では df が消えることがある（講義ノートの命題 III.2.60, 講義ノートの定義 III.2.62）．なお, 一つの局所環での生成元から近傍上の層の等式 $\mathcal{I}_Z|_U = f\mathcal{O}_U$ へ進む点も非自明であり, 講義ノートの命題 III.2.60 の証明では, 岡の第 2 連接性定理（講義ノートの定理 III.2.163）を用いている.

定義 2.3 (因子・有効因子・台)**.** X 上の因子とは, 相異なる既約複素超曲面 Z_ν の局所有限な形式和

$$D = \sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu Z_\nu, \qquad m_\nu \in \mathbb{Z}$$

である．全ての m_ν が非負のとき D を有効因子といい, $D \geq 0$ と書く．その台は

$$\operatorname{Supp} D := \bigcup_{m_\nu \neq 0} Z_\nu$$

で定める（講義ノートの定義 III.2.59）.

補足 2.4 (局所有限性)**.** 局所有限とは, X の各点が, $m_\nu \neq 0$ である有限個の Z_ν としか交わらない近傍を持つという意味である．X が非コンパクトなら成分全体が有限個である必要はない．一方, $\operatorname{Supp} D$ がコンパクトなら非零係数を持つ成分は有限個となる.

函数の零点や極を, 超曲面に沿う位数とともに記録すると因子が得られる．正則函数 f が各連結成分上で恒等的に 0 でなければ,

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{\Gamma} \operatorname{ord}_\Gamma(f)\, \Gamma$$

[*4] 各開集合 $W \subset X$ に対して, $\mathcal{I}_Z(W) := \{g \in \mathcal{O}_X(W) \mid g|_{W \cap Z} = 0\}$ と定め, 制限写像には正則函数の制限を用いる．これが $\mathcal{O}_X$ のイデアル層をなす（講義ノートの式 (155)）.

と定める．ここで Γ は f の零点集合の既約超曲面成分を走り, $\mathrm{ord}_\Gamma(f)$ は Γ に沿う零点の位数である．この和は局所有限である．これは局所環 $\mathcal{O}_{X,p}$ の Noether 性に基づく解析集合の局所的な有限既約分解から従う（講義ノートの定理 III.1.32, 講義ノートの定理 III.2.45; 因子の定義との関係は講義ノートの定義 III.2.64 とその直後も参照）．

有理型単元 $f \in \mathcal{M}_X^*(U)$ については, 局所的に $f = g/h$ と表示して

$$\mathrm{div}(f) := \mathrm{div}(g) - \mathrm{div}(h)$$

と定める．ここで有理型単元とは, 各連結成分上で恒等的に 0 ではない有理型函数のことである．負の係数は極の位数を表す．この定義は表示に依存せず, $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$ を満たす．詳細は講義ノートの定義 III.2.62, 講義ノートの定義 III.2.64 を参照されたい．

2.2 局所方程式から直線束へ

因子 D を固定する．十分細かい開被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ を選ぶと, 各 U_j 上に有理型単元 f_j を取り,

$$\mathrm{div}(f_j) = D|_{U_j}$$

とできる．局所的には, 各既約枝の方程式をその係数のべきに上げて掛け合わせればよい．D が有効なら全ての f_j を正則に取れる．重なり $U_{jk} := U_j \cap U_k$ 上では

$$g_{jk} := \frac{f_j}{f_k} \in \mathcal{O}_X^*(U_{jk}), \qquad g_{jk}g_{k\ell} = g_{j\ell}.$$

従って $\{g_{jk}\}$ は乗法的な Čech 1-cocycle である．

定義 2.5 (因子に対応する直線束)**.** 上の cocycle が定める正則直線束を $[D] \to X$ と書く．局所正則枠 e_j を用いると, 本稿の規約では

$$e_k = \frac{f_j}{f_k}\, e_j \qquad \text{on } U_{jk} \tag{2.1}$$

となる．すなわち $[D]$ は

$$\left[\left\{\left(U_{jk}, \frac{f_j}{f_k}\right)\right\}\right] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq \mathrm{Pic}(X)$$

に対応する．

補足 2.6 (Weil 因子と Cartier 因子)**.** 既約超曲面の形式和としての因子は Weil 因子と呼ばれる．一方, 上のような局所有理型方程式 $\{f_j\}$ を, 共通の細分と各 f_j への正則単元の乗法を同一視して扱うものが Cartier 因子である．複素多様体上では, 局所方程式の存在により両者は同一視できる．従って $[D]$ の構成は被覆や方程式の選択によらず, 同型を除いて定まる．周囲の空間が特異な場合には, この同一視を無条件に用いることはできない（講義ノートの定義 III.2.67 とその直後の説明）．

2.3 有効因子の標準切断

命題 2.7 (標準切断)**.** $D \geq 0$ とし, 上の f_j を正則に選ぶ. 局所切断 $f_j e_j$ は貼り合わさって $[D]$ の大域正則切断

$$\sigma_D|_{U_j} := f_j e_j$$

を定める. これを D の標準切断という. その零因子は重複度も含めて D である.

証明. 式 (2.1) により, 重なり上で $f_k e_k = f_j e_j$ となる. 従って局所切断は貼り合わさる. 各 e_j は消えない局所枠なので, 切断の零点とその位数は f_j のものに一致する（講義ノートの命題 III.2.65）. □

特に σ_D は $X \setminus \operatorname{Supp} D$ 上では消えない. 次節ではこの切断を用い, 直線束上の計量から補集合上の函数を作ることを考える.

3 曲率と補集合上の多重劣調和函数

3.1 Hermitian 計量と因子の標準切断

正則直線束 $L \to X$ の C^∞ 級の Hermitian 計量 h を, 局所正則枠 e_j に関して

$$|e_j|_h^2 = e^{-\varphi_j}$$

と書く. 実数値の C^∞ 級の函数 φ_j を局所重みという. $e_k = g_{jk} e_j$ なら $\varphi_k = \varphi_j - \log|g_{jk}|^2$ である. したがって局所的な $(1,1)$-形式

$$\sqrt{-1}\Theta_h = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_j, \qquad \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h = dd^c\varphi_j$$

は X 上で貼り合う. 後者は $c_1(L)$ の実係数像を表す（講義ノートの式 (149), 講義ノートの命題 III.2.22）.

定義 3.1. L が**半正**であるとは, $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$ となる C^∞ 級の Hermitian 計量 h をもつことをいう. $\sqrt{-1}\Theta_h > 0$ となる計量をもつとき, L は**正**であるという. また, 遷移函数を絶対値 1 の局所定数函数に取れるとき, L は**ユニタリ平坦**であるという. 解析空間上の直線束についても, 遷移函数を用いて同様に定義する.

ユニタリ平坦な枠のノルムを 1 とすれば, 曲率が零の計量を得る. 逆に, 曲率が零なら局所重みは多重調和であり, 正則枠を変更してそのノルムを 1 にできる. したがってユニタリ平坦性は零曲率計量の存在と同値である（講義ノートの定義 III.2.123 とその直後の説明）.

以下, D を有効因子, $Z := \operatorname{Supp} D$ とし, σ_D を $[D]$ の標準切断とする. $[D]$ 上の C^∞ 級の計量 h に対して

$$\psi_h := -\log|\sigma_D|_h^2 \quad \text{on } X \setminus Z \tag{3.1}$$

と置く. 局所的に $\sigma_D = s_j e_j$ と書けば

$$\psi_h = -\log|s_j|^2 + \varphi_j.$$

Lelong–Poincaré の公式は, カレントの意味で

$$dd^c\psi_h = -T_D + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h, \qquad \sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi_h = -2\pi T_D + \sqrt{-1}\Theta_h \tag{3.2}$$

を与える（Lelong–Poincaré の公式そのものは講義ノートの定理 III.2.99 と講義ノートの式 (173) を参照）. 特に $X \setminus Z$ 上では $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi_h = \sqrt{-1}\Theta_h$ である. よって h が半正曲率をもつことは, ψ_h が $X \setminus Z$ 上で多重劣調和であることと同値である. 逆向きには, C^∞ 級の重み φ_j の Levi 形式が稠密な開集合で半正なら, 連続性により Z 上でも半正となることを使う.

補足 3.2 (カレントと計量 – 函数の対応)**.** $D = \sum_\nu m_\nu Z_\nu$ に対して,

$$T_D(\eta) = \sum_\nu m_\nu \int_{(Z_\nu)_{\mathrm{reg}}} \eta, \qquad \eta \in A_c^{n-1,n-1}(X).$$

特異点の近くでもこの積分は収束し, 閉カレントを定める. 講義ノートの定理 III.2.96, 講義ノートの注意 III.2.98, および 講義ノートの補題 III.2.139 を参照されたい. また, $X \setminus Z$ 上の C^∞ 級の函数 ψ から計量を復元するためには, 各 $\psi + \log|s_j|^2$ が Z を越えて C^∞ 級に延長することを要する. この条件のもとで, それらを局所重みとする計量が定まる（講義ノートの式 (351)–(352)）.

3.2 曲面内の非特異な曲線と上田の分類

X を複素曲面, $Z \subset X$ をコンパクト Riemann 面とし, $D = Z$ の場合を考える. $[Z]|_Z \simeq N_{Z/X}$ なので,

$$(Z^2) = \deg N_{Z/X}.$$

法束の次数によって, 次のように状況が分かれる.

- $\deg N_{Z/X} < 0$ なら $[Z]$ は半正でない. 実際, 半正曲率を Z に制限して積分すれば, $\deg([Z]|_Z) \geq 0$ となって矛盾する.
- $\deg N_{Z/X} > 0$ なら, ある近傍 V 上で $[Z]|_V$ は正である. 曲線上の正次数と正値性の同値は 講義ノートの定理 III.2.177, 近傍への正曲率計量の拡張は 講義ノートの定理 V.5.1 の一成分の場合である.
- $\deg N_{Z/X} = 0$ なら法束はユニタリ平坦であり, 近傍の解析構造が重要となる.

最後の場合には, 第 3 日に紹介した上田の分類を用いる. ここでいう比較は, $[Z]$ と, 法束 $N_{Z/X}$ のユニタリ平坦な近傍への拡張との比較である. (α) 型は有限上田型の場合, (β) 型は $[Z]$ がある近傍でユニタリ平坦となる場合, (γ) 型は形式的な比較は自明だが解析的な比較が自明でない場合である（講義ノートの定義 IV.8.4, 講義ノートの注意 IV.8.5）. (α) 型では $[Z]$ は半正でなく, (β) 型では半正となる. 後者の大域的半正性には, 次節で示す半正性の局所性を用いる.

補足 3.3 (増大度による非半正性の説明)**.** 有限上田型を μ とし, $r_Z = |\sigma_Z|_{h_0}$ を固定した C^∞ 級の計量で測った函数とする. 上田の定理によれば, $0 < b < \mu$ に対して, 穴あき近傍上の多重劣調和函数 $u = o(r_Z^{-b})$ は, 十分小さい穴あき近傍で定数となる. ところが C^∞ 級の半正曲率計量があれば, $\psi_h = -2\log r_Z + O(1)$ はこの増大度条件を満たす一方, Z に向かって $+\infty$ に発散する. これが矛盾である. 講義ノートの定理 V.4.6(ii) および 講義ノートの補題 V.4.4 を参照されたい.

(γ) 型については, 上田の構成した例で $[Z]$ が半正でないことが, Koike–Ogawa の結果から分かる. 具体的には, 楕円曲線の suspension では, 横断方向の正則写像芽の線型化可能性と $[Z]$ の半正性が同値となる. 上田の例とこの同値関係については, 講義ノートの注意 IV.7.4 と 講義ノートの系 V.3.6 の証明を参照されたい. ここで述べている非半正性は, この具体例についての主張である.

4 主定理とその準備

[K, Theorem 1.1] に基づく半正性の判定を, 講義で用いた仮定のもとで述べる.

定理 4.1 (有効因子の半正性と平坦近傍)**.** X を連結なコンパクト Kähler 多様体, $n := \dim X \geq 2$ とする. $D \neq 0$ を有効因子とし, $Z := \operatorname{Supp} D$ は連結であるとする. $[D]|_Z$ がユニタリ平坦であると仮定する. このとき次の条件は同値である.

(i) $[D]$ は半正である.

(ii) Z のある開近傍 V 上で $[D]|_V$ はユニタリ平坦である.

(iii) Z を覆う X の開集合族 $\{V_j\}$ があり, 正則函数 $w_j \colon V_j \to \mathbb{C}$ が各 j で存在し,

$$w_j^{-1}(0) = Z \cap V_j$$

を満たし, 各比 w_j/w_k は $V_j \cap V_k$ 上の絶対値 1 の正則単元に延長する.

条件 (iii) では, w_j の零因子の重複度が D の重複度と一致することをあらかじめ仮定しない.

補足 4.2 (講義ノートの主定理との関係)**.** 講義ノートの定理 V.2.5 は, $[D]$ が nef で数値的次元 1 であるという仮定のもとで同じ同値を与える. ここでは $[D]|_Z$ のユニタリ平坦性から, Kähler 形式 ω に対して

$$\int_X c_1([D])^2 \wedge \omega^{n-2} = \sum_\nu m_\nu \int_{Z_\nu} c_1([D]) \wedge \omega^{n-2} = 0 \tag{4.1}$$

となる. また $D \neq 0$ は有効なので,

$$\int_X c_1([D]) \wedge \omega^{n-1} = \sum_\nu m_\nu \int_{Z_\nu} \omega^{n-1} > 0.$$

半正性を仮定すれば $[D]$ は nef である. 半正な曲率形式の二乗の積分が零なら, その階数は各点で高々 1 となるので, 上の 2 式から数値的次元は 1 となる. したがって講義の主定理は, 講義ノートの定理のこの設定における形である. nef 性と数値的次元の定義は講義ノートの定義 V.1.9 と 講義ノートの注意 V.1.11 を参照されたい.

4.1 交点行列と重複度の比較

主定理の条件 (iii) から因子の重複度を回復するため, 線型代数の事実を準備する. A を実対称 N 次行列とし, 非対角成分が非負で, $a_{\nu\mu} > 0$ を辺とするグラフが連結であるとする. 最大固有値を λ と書くと,

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\iff \exists m \in \mathbb{R}^N_{>0} \quad Am \in \mathbb{R}^N_{>0}, \\ \lambda = 0 &\iff \exists m \in \mathbb{R}^N_{>0} \quad Am = 0, \\ \lambda < 0 &\iff \exists m \in \mathbb{R}^N_{>0} \quad -Am \in \mathbb{R}^N_{>0}. \end{aligned}$$

最大固有値の固有空間は 1 次元であり, 正の固有ベクトルで生成される. A が整数行列なら, 各条件の m は正の整数ベクトルに取れる.

補足 4.3. この事実は 講義ノートの補題 II.2.1 と 講義ノートの命題 II.2.2, また [KU, Proposition 3.2, Lemma 3.3] にまとめられている. 十分大きな $c > 0$ に対して $A + cI$ に Perron–Frobenius の定理を適用する方法もある（講義ノートの定理 II.2.5）. 固有空間が 1 次元であることは, 独立な 2 本の固有ベクトルがあれば, ある成分が零となる非零固有ベクトルを作れてしまうことからも分かる.

主定理の設定で, $Z_1, \dots, Z_N$ を Z の既約成分とし,

$$A = (a_{\nu\mu}), \qquad a_{\nu\mu} := \int_X c_1([Z_\nu]) \wedge c_1([Z_\mu]) \wedge \omega^{n-2}$$

と置く. この行列は上の仮定を満たす. $D = \sum m_\nu Z_\nu$ と書くと, $[D]|_Z$ のユニタリ平坦性より $Am = 0$ である. したがって, 同じ台をもつ有効因子 $D' = \sum m'_\nu Z_\nu$ が

$$\int_{Z_\nu} c_1([D']) \wedge \omega^{n-2} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

を満たせば, $Am' = 0$ と核の 1 次元性から $D' = aD$, $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ となる. これが 講義ノートの補題 V.2.6 の内容である. 高次元で一般の ω を用いた行列 A は実係数だが, この比例係数の有理性は m, m' が整数であることから従う.

4.2 半正性の局所性と容易な含意

命題 4.4 (半正性の局所性)**.** X を複素多様体, D をコンパクトな台 Z をもつ有効因子とする. $[D]$ が X 上で半正であることと, ある開近傍 $V \supset Z$ 上で $[D]|_V$ が半正であることは同値である. さらに, V 上の半正曲率計量は, Z のより小さい近傍でそのまま保って, X 上の半正曲率計量に延長できる.

証明. 制限の向きは明らかなので, 逆向きを示す. $Z = \varnothing$ なら σ_D を大域正則枠とする零曲率計量を取ればよい. 以下では $Z \neq \varnothing$ とする. V 上の計量から $\psi = -\log|\sigma_D|^2_h$ を作り, $Z \subset W \Subset V$ と取る. ∂W の近傍で $\psi < C - 2\varepsilon$ となるように C を大きく選び,

$$\Psi = \begin{cases} \mathrm{RegMax}_\varepsilon(\psi, C) & \text{on } W \setminus Z, \\ C & \text{outside } W \end{cases}$$

と置く．ここで $\mathrm{RegMax}_\varepsilon$ は C^∞ 級に正則化した最大値である．二つの式は ∂W 付近で一致し, Ψ は $X \setminus Z$ 上で C^∞ 級かつ多重劣調和となる．一方, $\psi \to +\infty$ により, Z の十分近くでは $\Psi = \psi$ である．したがって計量 – 函数の対応を用いて, 求める計量が復元できる． □

補足 4.5. この命題に X のコンパクト性や Kähler 性は不要であり, 因子の台のコンパクト性を使っている．講義での $\chi \circ \psi$ による構成は, $\chi(t) = \mathrm{RegMax}_\varepsilon(t, C)$ と取ったものである．詳細は 講義ノートの命題 V.2.1, 正則化最大値は 講義ノートの例 I.4.9 を参照されたい．

主定理の (ii) から (i) はこの命題で従う．また, 平坦な正則枠で標準切断 σ_D を書けば, その係数函数は (iii) を満たす．この向きでは零因子の重複度も D と一致している．

逆に (iii) の函数の零因子を貼り合わせて $D' = \sum m'_\nu Z_\nu$ を得る．その遷移函数の絶対値は 1 なので, $[D']$ は Z の近傍でユニタリ平坦である．上の数値的比例性から, 正整数 p, q を用いて $pD = qD'$ と書ける．$[D']^{\otimes q} \simeq [D]^{\otimes p}$ の平坦計量の正の p 乗根を取れば, $[D]$ の平坦計量を得る．これで (iii) から (ii) が従う．正則函数の根を選ぶ必要はなく, 既に与えられた直線束上で計量の根を取っている．

5 主定理の証明の概略

残るのは (i) から (ii) である．X の Kähler 形式 ω を一つ固定する．$[D]$ 上に半正曲率をもつ C^∞ 級の Hermitian 計量 h を取り,

$$\eta := |\sigma_D|_h^2, \qquad \psi := -\log \eta \quad \text{on } X \setminus Z$$

と置く．ψ は多重劣調和で, Z に向かって $+\infty$ に発散する．まず十分高いレベル集合が Levi 平坦となることを示し, そこで得られる係数函数の振る舞いに応じて二つの場合に分ける．以下は 講義ノートの定理 V.2.5 の証明に沿った概略である．

5.1 Step 1: レベル集合の Levi 平坦性

まず, Z の十分近くで $d\psi \neq 0$ となる．実際, 局所的に $\eta = |s_j|^2 e^{-\varphi_j}$ と書き, 実解析的函数 $|s_j|^2$ に Łojasiewicz の勾配不等式を適用すると, ある $c > 0$, $0 < \theta < 1$ に対して

$$\left\| \frac{\partial s_j}{s_j} \right\| \geq c|s_j|^{2\theta - 2} \longrightarrow +\infty \quad (s_j \to 0)$$

を得る．$\partial \varphi_j$ は有界なので, $\partial \psi = -\partial s_j / s_j + \partial \varphi_j \neq 0$ となる．この議論は, Z が特異でも D に重複度があっても適用できる（講義ノートの定理 III.2.57, および 講義ノートの定理 V.2.5 の証明）．

したがって, 十分大きな t に対し

$$M_t := \{\psi = t\}, \qquad \Omega_t := Z \cup \{\psi > t\} = \{\eta < e^{-t}\}$$

は, それぞれ C^∞ 級のコンパクト実超曲面と Z の近傍となる．M_t は $\{\psi < t\}$ 側の境界として向き付ける．これは Ω_t の境界の向きとは反対である．

補足 5.1 (レベル集合の連結性)**.** 十分小さな η の劣位集合の各連結成分は Z と交わる. そうでなければ, その成分内で η が正の最小値を取り, $d\eta \neq 0$ に反する. Z が連結なので劣位集合も連結となる. 解析的超曲面を除いても連結であり, η は穴あき近傍から小区間への固有な沈め込みとなる. Ehresmann の定理を用いると, レベル M_t も連結である. 講義ノートの注意 III.2.95, 講義ノートの定理 I.8.7, および 講義ノートの定理 V.2.5 の証明 (pp. 709–710) を参照されたい.

ここで Nemirovski の議論にならい,

$$F(t) := \int_{M_t} d^c\psi \wedge dd^c\psi \wedge \omega^{n-2} \tag{5.1}$$

を考える. 選んだ向きと ψ の多重劣調和性により $F(t) \geq 0$ である. また, $t_1 < t_2$ に対して Stokes の定理から

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{\{t_1<\psi<t_2\}} (dd^c\psi)^2 \wedge \omega^{n-2} \geq 0 \tag{5.2}$$

となる. すなわち F は単調非減少である.

補足 5.2 (境界の向きと積分の非負性)**.** ν を ψ が増加する向きの実単位法線とすると, $d^c\psi(J\nu) = d\psi(\nu)/(4\pi) > 0$ である. $J\nu$ に続けて複素接空間 $TM_t \cap JTM_t$ の複素向きを並べると, 上で選んだ境界の向きになる. この向きに関して (5.1) の被積分形式は非負の密度である. 講義ノートの定理 III.2.191 の証明と 講義ノートの式 (353)–(354) を参照されたい.

次に極限を求める. Z の近くで h に一致し, 少し大きな近傍の外では $|\sigma_D|_{\widetilde{h}} = 1$ となる C^∞ 級の計量 $\widetilde{h}$ を選ぶ. これは 講義ノートの補題 III.2.146 の構成で得られる.

$$\alpha := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_{\widetilde{h}}, \qquad \psi_{\mathrm{aux}} := -\log|\sigma_D|^2_{\widetilde{h}}$$

と置く. α は C^∞ 級の閉形式で $c_1([D])$ を表し, $X \setminus Z$ 上で $\alpha = dd^c\psi_{\mathrm{aux}}$ となる. 大きな t に対して M_t 近傍では $\psi_{\mathrm{aux}} = \psi$ なので, Stokes の定理により

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{X\setminus\Omega_t} \alpha^2 \wedge \omega^{n-2} \\ &= \int_X \alpha^2 \wedge \omega^{n-2} - \int_{\Omega_t} \alpha^2 \wedge \omega^{n-2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ω_t は Z に縮まり, 解析的超曲面 Z の体積は零である. α が C^∞ 級なので最後の積分は零に収束する. したがって (4.1) と合わせて

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \int_X c_1([D])^2 \wedge \omega^{n-2} = 0.$$

これは 講義ノートの式 (355)–(356) の計算である.

非負で単調非減少な F の終端値が零なので, $F(t) = 0$ である. 被積分密度が非負であることから, M_t の複素接空間上の Levi 形式のトレースは零となる. その形式は半正定値だから零であり, M_t は Levi 平坦である. さらに全体の複素 Hessian も半正定値なので, 複素接方向と法線方向の混合成分も零となる. $d\psi \neq 0$ と合わせると, 穴あき近傍上に C^∞ 級の函数 $f \geq 0$ が存在して

$$\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi = f\sqrt{-1}\partial\psi \wedge \bar\partial\psi \tag{5.4}$$

となる．これが Step 1 の結論である（講義ノートの式 (357)）．

5.2 Step 2: レベル集合上で非定数となる場合

まず, 上で得た等式

$$\partial\bar{\partial}\psi = f\,\partial\psi\wedge\bar{\partial}\psi$$

を微分する．右辺を微分して現れる $\partial\bar{\partial}\psi$ を再びこの等式で置き換えると,

$$df\wedge\partial\psi\wedge\bar{\partial}\psi = 0$$

を得る．したがって, f は各 M_t の Levi 葉に沿って一定である．

任意の十分大きな t_0 に対して, ある $t\in(t_0,+\infty)$ が存在し, $f|_{M_t}$ が非定数となる場合を考え, そのような t を一つ固定する．Sard の定理により正則値からなる区間を取り, その中から異なる 3 点 r_1,r_2,r_3 を選ぶ．レベル集合

$$\{x\in M_t \mid f(x)=r_j\}$$

の連結成分を, この区間に沿って整合的に選び, Γ_j と書く．f が Levi 葉に沿って一定であることから, Γ_j は X の連結な非特異コンパクト複素超曲面となる．また, これらは互いに素であり, 同じホモロジー類を定める．

ここで Neeman の議論による fibration の構成（[Nee, pp. 109–110]; コンパクト Kähler 多様体における形は [KJDG, Lemma 3.6 の証明, p. 1220] および講義ノートの補題 V.2.7）を用いると, コンパクト Riemann 面 R への, 連結なファイバーをもつ全射正則写像

$$\pi : X\longrightarrow R$$

が得られ, 少なくとも一つの Γ_j はそのファイバーの台となる．Remmert の定理より $\pi(Z)$ は R の解析的部分集合である．Z は連結で, このファイバーと交わらないので, $\pi(Z)$ は一点である．交点数を用いてファイバーの台と重複度を比較すると, ある $p\in R$ と $a\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対して

$$\pi^*\{p\} = aD$$

となる．基底の p のまわりの局所座標を引き戻すことにより, 左辺の因子に対応する直線束は Z の近傍で自明である．正のテンソル冪を取り, 最後に計量の正の根を取れば, $[D]$ は Z の近傍でユニタリ平坦となる．

補足 5.3 (3 つの超曲面と重複度の比較)**.** 講義ではこの段階を簡略化した．正則値の区間上で一つの連結成分を追跡できることは Ehresmann の定理による．得られる 3 つの超曲面は isotopy で結ばれ, 対応する直線束の整係数第一 Chern 類が等しい．fibration の構成は 講義ノートの補題 V.2.7, 元の因子 D との数値的な比例は 講義ノートの補題 V.2.6 にまとめられている．Z がファイバーの台全体となることを含む詳細は, 講義ノートの定理 V.2.5 の証明 (pp. 708–711) を参照されたい．

5.3 Step 3: レベル集合上で一定となる場合

残るのは, 十分大きいすべての t に対して $f|_{M_t}$ が一定となる場合である. レベル集合の連結性と $d\psi \neq 0$ より, ある C^∞ 級の実函数 g を用いて

$$f = g \circ \psi$$

と書ける. 一変数の常微分方程式

$$\chi'' + g\chi' = 0 \tag{5.5}$$

を解き, $\widetilde{\psi} := \chi \circ \psi$ と置く. すると

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\widetilde{\psi} &= \chi'(\psi)\,\partial\bar{\partial}\psi + \chi''(\psi)\,\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \\ &= \big(\chi'(\psi)g(\psi) + \chi''(\psi)\big)\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi = 0. \end{aligned}$$

したがって $\widetilde{\psi}$ は多重調和函数である.

ここで解 χ を適切に正規化すると, $s \to +\infty$ において $\chi(s) - s \to 0$ とできる. D の局所方程式を s_j とし,

$$|\sigma_D|_h^2 = |s_j|^2 e^{-\varphi_j}, \qquad \psi = -\log|s_j|^2 + \varphi_j$$

と書けば, $\widetilde{\psi} + \log|s_j|^2$ は Z の近くで局所有界であり, Z の外で多重調和である. この函数を Z を越えて多重調和に延長したものを $\widetilde{\varphi}_j$ と書くと,

$$\widetilde{\psi} = -\log|s_j|^2 + \widetilde{\varphi}_j.$$

局所計量 $e^{-\widetilde{\varphi}_j}$ は貼り合わさり, $[D]$ 上の曲率が零の C^∞ 級の Hermitian 計量を与える. これで定理 4.1 の半正性からユニタリ平坦性への含意が示された.

補足 5.4 (常微分方程式の正規化と増大度)**.** 講義では, 解の正規化と増大度の評価を省略した. 以下は 講義ノートの定理 V.2.5 の証明 (pp. 711–712) に基づく補足である. $\eta := |\sigma_D|_h^2 = e^{-\psi}$ と置くと, $f = B(\eta)$ と書ける. Z の一つの既約成分の非特異な点を他の成分を避けて取り, その成分の D における重複度を m とする. 局所的に $\eta = |w|^{2m}e^{-\varphi}$ と書くと,

$$f = \frac{|w|^2\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial w\,\partial\bar{w}}}{\left|-m + w\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\right|^2}.$$

実弧 $w = r \geq 0$ に沿って $\eta^{1/(2m)}$ を局所座標として用いることにより,

$$B(t) = t^{1/m}A(t)$$

を得る. ここで A は $t = 0$ まで連続な函数である. f は η のみの函数なので, この一つの評価がすべての十分小さいレベルに適用できる.

η に変数を替えると,

$$\partial\bar{\partial}\eta = G_\eta(\eta)\,\partial\eta \wedge \bar{\partial}\eta, \qquad G_\eta(t) = \frac{1}{t} - t^{1/m-1}A(t). \tag{5.6}$$

これは 講義ノートの式 (358) である. 講義ノートではこの係数を G と書くが, 本文の $f = g(\psi)$ に現れる g とは異なるので, ここでは G_η と区別した.

具体的に

$$Q(t) := \int_0^t s^{1/m-1} A(s)\, ds,$$
$$H(t) := \int_0^t \frac{e^{Q(s)} - 1}{s}\, ds$$

と置く. $Q(t) = O(t^{1/m})$ なので $H(t) = O(t^{1/m})$ であり, $H(0) = 0$ と連続延長できる. $u(t) := \log t + H(t)$ は $u'' + G_\eta u' = 0$ を満たし,

$$\widetilde{\psi} = -u(\eta) = \psi - H(\eta)$$

は多重調和となる. 元の ψ の変数に戻せば,

$$g(s) = e^{-s/m} A(e^{-s}), \qquad \chi(s) = s - H(e^{-s})$$

であり, (5.5) と $\chi(s) - s = O(e^{-s/m}) \to 0$ が従う. この ODE の一般形は 講義ノートの小演習 I.4.15 にあり, 対数主項をもつ解の存在と一意性の詳しい証明はその解答 (pp. 808–809) に記されている.

補足 5.5 (特異な Z を越える延長)**.** 上の議論は Z が特異であったり, D が重複度をもったりする場合にも適用できる. 実際,

$$\widetilde{\psi} + \log |s_j|^2 = \varphi_j - H(\eta)$$

は Z の各点の近くで局所有界である. 複素多様体内の解析的超曲面は局所的に pluripolar であるため, 講義ノートの補題 III.2.94 の多重調和函数の可除特異点定理を用いられる. 延長された函数の計量としての遷移則は, 稠密な補集合で成り立つ等式を連続性によって延長することで得られる. 詳細は 講義ノートの定理 V.2.5 の証明末 (p. 712) を参照されたい.

6 半正な有効因子の補集合と Hartogs 型拡張

最後に, $[D]|_Z$ のユニタリ平坦性を仮定せず, 半正な有効因子の補集合における正則函数を考える.

系 6.1 (fibration と Hartogs 型拡張の二分法)**.** X を連結コンパクト Kähler 多様体, $D \neq 0$ を有効因子とし, $Z := \operatorname{Supp} D$ は連結とする. $[D]$ が半正ならば, 次のちょうど一方が成り立つ.

(i) コンパクト Riemann 面 R, 連結なファイバーをもつ全射正則写像 $\pi : X \to R$, 点 $p \in R$, 正の有理数 a が存在して, $\pi^*\{p\} = aD$ となる.

(ii) Z の任意の連結開近傍 $V \subset X$ に対して, $V \setminus Z$ 上の正則函数は $X \setminus Z$ 全体へ一意に延長する.

これは 講義ノートの定理 V.2.9 の主張である. (ii) では, 因子に近い側で与えた正則函数を補集合全体へ延長できる. 一方, (i) の場合には基底の局所座標を用いて, 別のファイバーに極をもつ函数を Z の近くで作れるため, (ii) は成立しない.

参考文献

[LN] T. Koike, *Complex Analytic Geometry and Dynamics on Analytic Neighborhood Spaces*, Version 1.1, October 28, 2026. 講義ノート. 講義用ウェブサイト: https://tkoike.com/lecture/komaba2026/.

[KU] T. Koike and T. Ueda, *Intersection matrix and neighborhood structure of complex curves*, to appear in Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.).

[K] T. Koike, *Pluripotential geometry on semi-positive effective divisors of numerical dimension one*, arXiv:2511.13903v2.

[G] H. Grauert, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.

[R] O. Riemenschneider, *Lecture notes, Chapter 9: Blowing down and the Grauert–Mumford criterion*, §9.8, Theorem 9.14. https://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/bookchap09.pdf.

[Nem] S. Yu. Nemirovski, *Stein domains with Levi-flat boundaries on compact complex surfaces*, Math. Notes **66** (1999), 522–525.

[Nee] A. Neeman, *Ueda theory: theorems and problems*, Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[KJDG] T. Koike, *Holomorphic foliation associated with a semi-positive class of numerical dimension one*, J. Differential Geom. **127** (2024), no. 3, 1207–1243.