講義の予定

弱擬凸性と半正直線束の複素解析幾何

小池 貴之（筑波大学）

2026 年 10 月 26 日（月）–10 月 30 日（金）

第 1 日　10 月 26 日（月）

多変数の複素解析

学部で習う 1 変数の複素解析を簡単に復習したのち, 多変数の正則関数の定義と基礎的な性質を概説します. 1 変数の場合と変わらない性質, 大きく異なる性質を比較しながら議論し, 解析接続の視点から多重劣調和関数や擬凸性の基礎概念を導入します. 最後に, これらに関連する層とコホモロジーを概説します.

- 劣調和関数の復習
- 多変数の正則関数の定義と基本性質
- Hartogs 図形と解析接続
- 多重劣調和関数と擬凸性
- 弱 1-完備, 強 1-凸, 強 1-完備
- 層とコホモロジー, Dolbeault コホモロジー

第 2 日　10 月 27 日（火）

強擬凸・弱擬凸のコホモロジーと小分母問題

前日に導入した層のコホモロジーを Čech コホモロジーの立場から捉え直し, 関連する対応を概観します. 次に, 強い擬凸性のもとでの高次コホモロジーの消滅・有限次元性を紹介し, L^2 法と Grauert の膨らまし法を通じてその仕組みを考えます. 最後に, 楕円曲線上の $\mathbb{C}^*$-束を例として, 弱い完備性のもとではコホモロジーの振る舞いに無理数論的条件が関わることを, Laurent 展開と上田の評価を用いて説明します.

- Čech コホモロジー, Leray 被覆, 指数完全列と正則な対数
- 強 1-完備性と消滅定理, L^2 法
- 強 1-凸性と有限次元性, Schwartz の定理と Grauert の膨らまし法
- 楕円曲線上の $\mathbb{C}^*$-束, 回転モノドロミーと Levi 葉層
- 小分母と Laurent 級数の収束, コホモロジーの Hausdorff 性
- Picard 群, ユニタリ平坦直線束に対する上田の評価

第 3 日　　10 月 28 日（水）

局所力学系と上田理論

ここまでは回転のモノドロミーの例のみを扱い, 弱 1-完備が明らかな状況下での考察をしてきました. これを摂動したモデルでは何が起きるでしょうか？ 対応する楕円曲線の近傍での複素解析幾何を, 一変数の局所力学系の議論を紹介つつ解説します. 次に, 複素曲面内のコンパクト Riemann 面へと設定を広げ, 上田哲生氏による分類や関連する結果の紹介をします.

- 楕円曲線上の suspension と正則管状近傍
- 正則関数芽の線型化と小分母問題
- small cycle, Siegel compacta と hedgehog
- 上田類と曲線近傍の分類
- 上田の線型化定理と形式的な座標補正
- 有限型における強多重劣調和関数と増大度

第 4 日　　10 月 29 日（木）

因子の近傍と直線束の半正性

これまで函数論的な性質を調べる際に仮定してきた多重劣調和関数を, 幾何学的な設定から構成する問題を考えます. 因子と対応する直線束を導入し, 楕円曲線の近傍を例に, 上田理論・局所力学系と半正計量の構成との関係を説明します. 次に, コンパクト Kähler 多様体上の有効因子について, 半正性と近傍上のユニタリ平坦性を結ぶ定理を紹介します. 交点行列の線形代数と Nemirovski の議論を用い, Levi 平坦なレベル集合から平坦計量を構成する証明を解説します.

- 因子と正則直線束, 標準切断
- Hermitian 計量の局所重み, 曲率と半正性
- 上田の (β) 型, ディオファントス条件と半正計量
- suspension の線型化可能性と半正性
- 交点行列と線形代数, Nemirovski の定理
- 有効因子の近傍, Levi 平坦なレベル集合と平坦計量

第 5 日 10 月 30 日（金）

直線束の半正性と形式化原理

第 4 日は主に有効因子が定める正則直線束の半正性について考察しました. 最終日は, 一般の正則直線束へと議論を広げます. コンパクト解析的部分集合への制限がユニタリ平坦となるような正則直線束について, その半正性判定問題を軸にしつつ, 形式化原理の観点から分かることを概観します.

- 一般の直線束の半正性と近傍上のユニタリ平坦性
- 平坦拡張との jet 比較, 1 次障害と半正曲率
- nef and big だが半正でない直線束
- 高次の形式的比較の問題と直線束の形式化原理（FPLB）
- コンパクト曲線の交点行列と最大固有値
- 射影平面の 9 点爆発の変形族, FPLB の成立と不成立