レポート課題

東京大学 2026 年度 A セメスター「数理科学特別講義 V」(担当: 小池貴之)

大学院科目・集中講義科目番号：901-59

定義と分類

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とし、$\lambda = e^{2\pi i\theta}$ とおく。また、$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|x\| := \min_{p\in\mathbb{Z}} |x-p|, \qquad L(\theta) := \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log\|n\theta\|}{n}$$

と定める。θ の連分数展開の収束分数を p_k/q_k（$k \geq 0$）とし、Brjuno 条件および (D_τ)（$\tau \geq 1$）を次で定める。

$$\text{Brjuno 条件}: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < \infty,$$

$$(D_\tau): \quad \exists c > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \qquad \|n\theta\| \geq c\, n^{-\tau}.$$

ある $\tau > 1$ について (D_τ) を満たすとき Diophantine であるといい、(D_1) を満たすとき bounded type であるという。以下の六つのクラスを考える (第 3 日講義のスライドも参考にせよ)。

I. $L(\theta) = \infty$。

II. $0 < L(\theta) < \infty$。

III. $L(\theta) = 0$ であり、Brjuno 条件を満たさない。

IV. $L(\theta) = 0$ であり、Brjuno 条件を満たすが Diophantine ではない。

V. Diophantine であるが、(D_1) を満たさない。

VI. Diophantine であり、(D_1) を満たす。

以上の無理数の分類に関連して、以下についてレポートに纏めよ。提出方法は別途講義中に指示する。

(1) Lebesgue 測度・濃度・Baire のカテゴリーのうち**少なくとも二つの観点**から、上のクラスのうち**少なくとも二つのクラス**について、それらに属する無理数がどのくらいたくさんあるかを比較し、論じよ。比較は区間 $(0,1)$ の中で行ってよい。

(2) 上のクラスのうち一つを選び、一変数の複素力学系における固定点近傍の話題において、そのクラスが果たす役割や関連する事実についてまとめよ。

例：$f(w) = \lambda w + O(w^2)$ に対する Siegel の線型化定理、f の反復が適切な正則函数（の芽）の空間に誘導する $\mathbb{Z}$-作用に関する群コホモロジーの Hausdorff 性との関係など。

(3) 上のクラスのうち一つを選び、非特異複素曲面に正則に埋め込まれたコンパクトリーマン面の近傍に関する話題において、そのクラスが果たす役割や関連する事実についてまとめよ。

例：上田の線型化定理、Arnol'd による楕円曲線近傍の正則管状近傍に関する定理など。

Definitions and classification

Let $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ and put $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. For $x \in \mathbb{R}$, define

$$\|x\| := \min_{p\in\mathbb{Z}} |x - p|, \qquad L(\theta) := \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log \|n\theta\|}{n}.$$

Let p_k/q_k $(k \geq 0)$ be the convergents of the continued fraction expansion of θ. The Brjuno condition and (D_τ) $(\tau \geq 1)$ are defined by

$$\text{Brjuno condition}: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < \infty,$$

$$(D_\tau): \quad \exists c > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \qquad \|n\theta\| \geq c\, n^{-\tau}.$$

We say that θ is Diophantine if it satisfies (D_τ) for some $\tau > 1$, and is of bounded type if it satisfies (D_1). Consider the following six classes (see also the slides for Day 3).

I. $L(\theta) = \infty$.

II. $0 < L(\theta) < \infty$.

III. $L(\theta) = 0$, and θ does not satisfy the Brjuno condition.

IV. $L(\theta) = 0$, and θ satisfies the Brjuno condition but is not Diophantine.

V. θ is Diophantine but does not satisfy (D_1).

VI. θ is Diophantine and satisfies (D_1).

Write a report on the following questions concerning this classification of irrational numbers. Submission instructions will be given separately in class.

(1) From **at least two of the following perspectives**—Lebesgue measure, cardinality, and Baire category—compare and discuss the sizes of **at least two of the classes** above. You may restrict the comparison to the interval $(0, 1)$.

(2) Choose one of the classes above and summarize its role and related facts in the study of dynamics near fixed points in one complex variable.

Examples: Siegel's linearization theorem for $f(w) = \lambda w + O(w^2)$; connections with the Hausdorff property of group cohomology for the $\mathbb{Z}$-action induced by the iterates of f on a suitable space of holomorphic functions (or germs).

(3) Choose one of the classes above and summarize its role and related facts in the study of neighborhoods of compact Riemann surfaces holomorphically embedded in non-singular complex surfaces.

Examples: Ueda's linearization theorem; Arnol'd's theorem on holomorphic tubular neighborhoods of elliptic curves.