PART I　CODEX への依頼文

Blow-up の VR 可視化

最初の図をつくるための指示

版：2026 年 9 月 8 日・v0.1　**対象：**Godot / Meta Quest 3

この文書は、数学者と「ちゃぴおくん」との対話を基に整理した、Codex への**初回依頼案**です。後日、Holomorphonautica のウェブサイトで「どのような自然言語の依頼から AI 支援可視化を始めたか」を示す資料として保存することを想定しています。逐語的な会話記録でも、実装・実機動作の完了報告でもありません。本文と補足を合わせて、以下を実装してください。

1．まず実現したい体験

Shafarevich『Basic Algebraic Geometry』の表紙を思わせる、**下の平面と、その上に方向をほどいた実 blow-up の面**を、3D VR で見られるようにしてください。表紙画像を取り込むのではなく、後述の数式から図形を生成してください。

最初は、説明を読むより先に、近づいたり横から見たりして「ほんとだ、非特異っぽいけれど、何か増えている」と観察したいです。その後、下の平面の点と上の面の点を同時に動かし、**原点では区別できなかった方向を、別々の点として追えるようになった**という対応を見たいです。

ただし、元の平面も blow-up 後の空間も滑らかです。「特異だった平面を修理する」という説明にはしないでください。また、表紙風の表示では貼り合わせを切り開いていることが分かるようにしてください。

2．横に置いて見比べたいもの

左の実 blow-up の横に、複素 blow-up の中の**実 3 次元部分**を、中実トーラスとして置いてください。その内部に、同じ実 blow-up をメビウス帯として表示してください。さらに、その近くに**複素例外曲線全体を示す球面**を置き、選択している方向を同期させてください。

初号機では、左右を見比べて「左の面が、右の 3 次元部分の中ではこのように入っている」「実方向に虚方向を一つ加えると、この円板の中を動ける」と観察できることを目指します。球面は、見ている方向を示す地図でもあります。

3．今回の範囲

数学的対象はまず $B = \mathrm{Bl}_0 \mathbb{C}^2$ とし、左の実点部分、右の実 3 次元部分、例外球面の**三つの連動表示**を実装してください。toric な商表示、Hopf 束、$\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2$ 全体、計量、Kähler–Ricci flow は今回は実装しません。将来それらを追加できるよう、数学上の状態と 3D 表示用座標を分けてください。

PART I　CODEX への依頼文（続き）

観察・操作・最初の完成形

4．最初にできてほしい観察

実数モード：二つの方向から原点へ近づく

起動時は実数モードにしてください。動かせる方向 θ と、固定した比較方向 θ_{ref} を用意し、同じ符号付き位置 s にある二点を表示してください。s を 0 へ動かすと、下の平面では二点が原点へ集まり、上の面・右のメビウス帯・例外球面では異なる方向が区別されるようにしてください。二つの方向が等しくなった場合は、同じ例外点になるのが正しい動作です。

原点上でも方向を操作できるようにしてください。点が原点に来たからといって、方向を消したり、一定の方向へ戻したりしないでください。曲線として描くのは直線の**狭義変換**で、例外集合は別の表示要素にしてください。

複素モード：円板の虚方向へ動く

右の選択ファイバーを円板として見せ、$\lambda = a + ib$ の b も動かせるようにしてください。$b = 0$ の直径が内部のメビウス帯との交わりです。$b \neq 0$ の点は左の実点部分にはないので、**左に同じ点があるような表示をしない**でください。複素モードでは固定比較点の組は隠して構いません。

5．入力の暫定割当

初号機用の暫定案です。既存の入力と競合する場合は、意味を保って割当を調整し、実際の操作を報告してください。

入力	動作	PC 確認用
右スティック左右	方向 θ を変更	左右矢印
右スティック上下	a を変更。実数モードでは $s = a$	上下矢印
左スティック上下	複素モードで b を変更	W / S
右トリガー押下	$a = b = 0$ にする。θ は保持	Space
左トリガー押下	実数／複素モードを切替	M
右 A ボタン	初期状態へ戻す	R
右 B ボタン	右のトーラスと球面の表示切替	V

実数モードへ戻るときは $b = 0$ にします。速度・デッドゾーン・表示サイズは調整可能にし、視点の自動回転・強制移動は不要です。

6．VR での見せ方

左に平面と上の面、右にトーラスと球面を置き、左右を向いて比較できる配置にしてください。説明は表示名・選択値・操作の要点に絞り、各図と対応点は、色だけでなく線の太さや点名でも見分けられるようにしてください。

PART II 数学・表示の補足

共通モデルと左側の図

7. 共通の数学モデル

$$B = \{((z_1, z_2), [u : v]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid z_1 v = z_2 u\},$$
$$\pi(z, \ell) = z, \qquad q(z, \ell) = \ell, \qquad E = \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1.$$

π は blow-down、q は方向を記録する写像です。q のファイバーは複素直線で、E は各ファイバーの原点を集めた零切断です。blow-up の一般的な定義は文献 [1]、実 blow-up の可視化の先行研究は文献 [2] を参照してください。

実点部分は

$$B(\mathbb{R}) = \{((x, y), [u : v]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 \mid xv = yu\}$$

であり、$s \in \mathbb{R}$ と $0 \le \theta \le \pi$ により

$$(x, y) = s(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \ell_\theta = [\cos\theta : \sin\theta]$$

と表します。貼り合わせは $\boxed{(s, 0) \sim (-s, \pi)}$ です。

8. 表紙風の切り開き表示

数学図の座標を (X, Y, Z)、上向きを第 3 成分とし、

$$P(s, \theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ 0),$$
$$F(s, \theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ h_0 + c\theta)$$

で下の点と上の点を表示してください。$|s| \le \delta$、$h_0, c > 0$ とします。上の面は F のパラメトリックメッシュ、下の平面は P の像を含む円板または格子です。

$s = 0$ の縦線は実例外集合の**切り開き表示**です。実例外集合そのものは円 $\mathbb{RP}^1$ で、線分ではありません。$\theta = 0, \pi$ の境界は、s の符号を反転させて貼り合わせる対象ですが、左の表示では接続面を作らないでください。

選択直線は θ を固定して s を動かした線、その狭義変換は $F(s, \theta)$ です。固定比較方向についても同様に描いてください。上下の対応補助線は細くし、面や選択点を隠さないようにしてください。

> $F_s = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ と $F_\theta = (-s\sin\theta, s\cos\theta, c)$ は $s = 0$ でも独立です。例外集合を尖りや裂け目として作る必要はありません。複素側も、例えば $(z_1, \xi) \mapsto ((z_1, z_1\xi), [1 : \xi])$ という通常の局所座標で扱えます。画像の見かけを滑らかさの証明とはしないでください。

PART II 数学・表示の補足

右側の中実トーラスとメビウス帯

9．表示するのは複素 blow-up の実 3 次元部分

初版では $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1$ を固定し、

$$M_\delta = \{p \in q^{-1}(\mathbb{RP}^1) \mid \|\pi(p)\| \le \delta\}$$

を表示してください。パラメータは

$$z = \lambda(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \lambda = a + ib, \qquad a^2 + b^2 \le \delta^2,$$

で、$(\theta, \lambda) \sim (\theta + \pi, -\lambda)$ です。M_δ は中実トーラスで、**複素曲面全体ではありません**。有限範囲に切った境界は、元の非コンパクトな空間の境界を意味しません。

10．3D 表示の具体式

$R > \delta$ を取り、$\eta = e^{i\theta}\lambda$ として、

$$\boxed{G(\theta, \lambda) = \big((R + \operatorname{Re}\eta)\cos 2\theta,\ (R + \operatorname{Re}\eta)\sin 2\theta,\ \operatorname{Im}\eta\big).}$$

複素数型を使わなくても、

$$\operatorname{Re}\eta = a\cos\theta - b\sin\theta, \qquad \operatorname{Im}\eta = a\sin\theta + b\cos\theta$$

から計算できます。$R > \delta$ により $R + \operatorname{Re}\eta > 0$ であり、表示点から $2\theta \bmod 2\pi$ と η を復元できます。上記の貼り合わせ以外の点を同一視する表示ではありません。

内部の実点部分

$b = 0$ とすると

$$G(\theta, s) = \big((R + s\cos\theta)\cos 2\theta,\ (R + s\cos\theta)\sin 2\theta,\ s\sin\theta\big)$$

がメビウス帯です。$s = 0$ はトーラスの芯の円で、$E \cap M_\delta$ に対応します。左の縦線と、この芯の円は、同じ実例外集合を異なる仕方で表示しています。

選択した複素ファイバー

θ を固定して $a^2 + b^2 \le \delta^2$ を動かすと、トーラスの断面円板になります。その中心は例外点、$b = 0$ の直径はメビウス帯との交わりです。a 軸と b 軸を短く表示し、実方向と虚方向を識別できるようにしてください。

11．中身を見せる描画

外郭を不透明なドーナツとして塗りつぶさず、少数の輪郭線・薄い外郭・メビウス帯・選択円板一枚・選択点を優先してください。3 次元領域の全点を粒子やボクセルで埋める必要はありません。透明面が重なって見づらい場合は、まず外郭を線だけにしてください。

PART II 数学・表示の補足

例外球面と、点の対応のルール

12. 複素例外曲線を球面として表示する

別配置の球面は、$E \simeq \mathbb{CP}^1$ 全体です。$\ell = [u : v]$ を

$$n(\ell) = \frac{1}{|u|^2 + |v|^2}\big(2\,\mathrm{Re}(u\bar{v}),\ 2\,\mathrm{Im}(u\bar{v}),\ |u|^2 - |v|^2\big) \in S^2$$

で球面上に表示してください。球面の中心と表示半径は、他の図を隠さないよう別に設定します。この半径は計量上の大きさではありません。

初版で使う実方向は大円

$$n(\ell_\theta) = (\sin 2\theta,\ 0,\ \cos 2\theta)$$

です。この大円全体と、選択方向の点を表示してください。θ が 0 から π へ動くと、大円を一周します。角度を誤って θ のまま球面へ渡さないでください。

13. 同じ点の表示と、写像による像を区別する

共通状態を $p = (z, \ell_\theta)$、$z = (a + ib)(\cos\theta, \sin\theta)$ とします。

表示場所	何を示しているか
左の上の面	$b = 0$ のとき、同じ点 p の実点部分での表示 $F(a, \theta)$
左の下の平面	$b = 0$ のとき、blow-down の像 $\pi(p) = a(\cos\theta, \sin\theta)$
右のトーラス	同じ点 p の 3 次元部分内での表示 $G(\theta, a + ib)$
例外球面	$q(p) = \ell_\theta$ を零切断と同一視した方向の表示。p 自体とは一般に別の点

$a = b = 0$ **のときに限り、選択点自身が例外集合上にあります。**例えば $a = 0, b \neq 0$ の点を例外点として表示してはいけません。また ℓ を $z/\|z\|$ だけから計算すると原点で破綻するため、方向を独立した状態として保持してください。

14. 実数／複素モードの同期

実数モードでは $b = 0$ を保ち、左の s と右の a を一致させてください。固定比較点は

$$p_{\mathrm{ref}} = \big(a(\cos\theta_{\mathrm{ref}}, \sin\theta_{\mathrm{ref}}), \ell_{\theta_{\mathrm{ref}}}\big)$$

とします。$a = 0$ では下の二点を本当に同じ原点に置き、見分けるために数学上の位置をずらさないでください。点名のラベルはずらして構いません。

複素モードで $b \neq 0$ になったら、左の選択点とその上下対応線を隠し、「選択点は実点部分の外」と短く表示してください。左の面や方向の直線は残せますが、$\mathrm{Re}\,\pi(p)$ を無表示のまま同じ点として代用してはいけません。右の点と球面の方向は引き続き同期させてください。

PART II 数学・表示の補足

貼り合わせ・初期値・座標の規約

15. 継ぎ目を別々に処理する

左の切り開いた面

初版は $0 \le \theta \le \pi$ で操作をクランプします。二つの端を「貼り合わせの切れ目」と表示し、対応は $s \leftrightarrow -s$ と示してください。高さの異なる端同士を面や直線で縫い合わせたり、選択点を反対側へ飛ばしたりしないでください。

右の閉じた表示

$$G(\pi, \lambda) = G(0, -\lambda), \qquad n(\ell_\pi) = n(\ell_0)$$

を満たすようにしてください。メビウス帯の端の頂点列は s の順序を反転して接続します。円板では $\lambda \leftrightarrow -\lambda$、すなわち円周角の π ずれです。$G(\pi, \lambda)$ と $G(0, \lambda)$ を接続してはいけません。

将来の周期化では λ の符号も整合させる必要があります。初版を単純な剰余処理に置き換えないでください。

16. 暫定の数値

初期案は以下です。操作速度、描画密度、レイアウトは調整可能にしてください。

項目	初期案	必須条件・意味
δ、R	1、2.5	$R > \delta > 0$
h_0、c	0.6、$1/\pi$	表示高さ。計量とは無関係
θ、θ_{ref}	$\pi/6$、$2\pi/3$	方向は無向直線
a、b	0.6δ、0	$a^2 + b^2 \le \delta^2$
モード	実数	左右比較から開始
面の分割数	方向 96、実位置 24	品質設定として変更可能
入力デッドゾーン	0.2	ドリフトがあれば調整

実数モードは $|a| \le \delta$、複素モードは円板内に制限します。範囲外の入力は円板へ射影し、正方形領域に変えないでください。トリガーは立ち上がりで一度だけ処理し、例えば押下 0.8・解除 0.6 とします。

17. Godot の座標へ変換する

本書の表示式は第 3 成分が上向きですが、Godot の 3D 座標は Y が上向きです [3]。例えば各表示の原点 o と尺度 $k > 0$ を用いて、

$$T_{o,k}(X, Y, Z) = o + k(X, Z, -Y)$$

で統一変換してください。数学の z_1, z_2 と Godot の Z 軸を混同しないようにしてください。左右の表示尺度は異なって構いませんが、数学上の δ, a, b, θ は共有してください。

PART III 実装と確認

作業の進め方と描画上の条件

18. 既存環境を読んでから、小さく追加する

現在開いている作業フォルダ、Godot の実際のバージョン、起動シーン、既存の XR 構成、入力設定、Git の状態を先に確認してください。確認した環境と変更予定を短く説明した後、実装に進んでください。版番号をこの文書から推測して固定したり、エンジンを勝手に更新したりしないでください。

既存の楕円曲線・Hartogs 図形等のシーンがあれば壊さず、新しい blow-up 用シーンとして追加してください。新規の空の作業場所なら、Godot と XR の最小構成も作成対象です。「人間が先に VR の土台を完成させる」ことは前提にしません。Godot 以外の既存ファイルがある場合も上書きせず、作業範囲内の専用サブフォルダへ分離してください。

明示的な許可なしに、既存ファイルの削除・移動・大量リネーム、破壊的 Git 操作、既存の未コミット変更の巻き戻しをしないでください。秘密情報やローカルの個人的なパスを、公開用の記録に書き込まないでください。

19. 状態・表示・入力を分ける

`blowup/` のような専用フォルダに、数学状態、表示用写像、各図の生成、入力、短い操作表示を分離してください。具体的なファイル名やノード構成は既存プロジェクトに合わせて構いません。**3D の頂点位置だけを唯一のデータにしない**でください。

基本状態は θ, a, b とモード、設定値は $\delta, R, h_0, c, \theta_{\mathrm{ref}}$ です。z, ℓ と π, q による像を計算できるようにしてください。図の平行移動や拡大縮小を変えても、数学上の対応が変わらない構成にします。

既存の XR 基本構成を優先して再利用し、入力は名前付きアクションにまとめてください。必要に応じて、実際に使っている版の公式資料を確認してください [4, 5]。初版は現在の PC 接続型 VR 環境を優先し、Quest 単体用の配布・導入手順を勝手に追加しないでください。

20. 描画負荷と見やすさ

パラメトリックメッシュには Godot の標準機能を使えます [6]。原則として新しい外部アドオンを追加せず、静的な面を毎フレーム作り直さないでください。操作時には点・選択直線・選択円板・短い数値表示だけを更新する構成を優先してください。

メビウス帯は表裏を大域的に分けられないため、片面のカリングで消えないよう両面描画を確認してください。頂点の継ぎ目、法線、裏側からの照明も確認します。面の交わりのちらつきを避ける処理は構いませんが、数学上の点をずらしてはなりません。

外郭の過剰な透明描画、常時大量のログ、不要な物理衝突判定や光源は避けてください。HUD は頭に貼り付いて視界を塞ぐ形にせず、図の近くの読みやすい固定表示を基本にします。HMD なしでも、PC の確認用カメラと入力で同じ数式と状態遷移を試せるようにしてください。

PART III 実装と確認

受入確認と、実装後の報告

21. 数式・状態の確認

浮動小数点の許容誤差を明示し、数値テストまたは確認用処理で以下を確認してください。純粋な数学計算部分は、可能なら 3D 描画や HMD に依存せず確認できるようにしてください。

番号	確認	期待する結果
1	incidence の整合	$z_1 v - z_2 u = 0$。$\lambda = 0$ でも ℓ が保持される。
2	実点の同期	$b = 0$ のとき左の $s = a$ と右の $G(\theta, a)$ が同じ数学上の点を表す。
3	異なる方向で原点へ	$a = b = 0$ では下の二点が原点へ一致し、異なる射影方向は例外集合上で分かれる。
4	円板内の位置	$a = 0, b \neq 0$ は例外点ではない。常に $a^2 + b^2 \leq \delta^2$。
5	トーラスの貼り合わせ	任意の λ で $G(\pi, \lambda) = G(0, -\lambda)$。メッシュにも同じ対応がある。
6	球面の整合	$\|n(\ell)\| = 1$。$n(\ell_0) = n(\ell_\pi)$。a, b を変えても方向点は変わらない。
7	左の切れ目	端を誤って閉じていない。操作で端を越えず、貼り合わせの表示がある。
8	複素モード	$b \neq 0$ では左に同じ点を偽って表示しない。実数モードへ戻ると $b = 0$。

数値上の「$b = 0$」判定には例えば $10^{-6}\delta$ 程度の許容誤差を設定し、表示のちらつきを避けてください。原点へ戻す操作では近似的に近づけるだけでなく、a, b を実際に 0 へ設定してください。

22. 画面・VR での確認

まず PC 上で、起動、点の操作、各図の切替、端点、原点、モード切替、リセットを確認してください。次に実機を使える場合は、両眼表示、頭部追従、左右コントローラー、ラベルの読みやすさ、面の裏側、図の遮蔽、操作時の描画負荷を確認してください。

コードを読んだだけの確認、PC での実行、HMD での確認を区別してください。実機を使えなければ「HMD 未確認」と明記します。既知の非致命警告と、今回の起動・追跡・入力の失敗を混同しないでください。負荷が高い場合は、対応を保ったまま外郭・透明面・分割数の順に簡素化します。

23. 作業後に返してほしい内容

実際に作成・変更したファイル、起動するシーン、操作方法、調整できる設定をまとめてください。そのうえで、上の確認のうち**実施済み**／**未実施**／**問題あり**を分け、残っている課題を記録してください。性能値を出す場合は、実際に測定した環境と条件も添えてください。

初回指示の原本を、実装が成功したかのように書き換えないでください。実装側で変えた数値・操作・構成、変更理由、まだ確かめていないことは、別の短い作業記録に残してください。Git コミットは勝手に行わず、復帰点として適切な区切りを提案してください。

PART IV 展望と記録

将来の拡張を妨げないために

24. 今回つくらないもの、後へ残すもの

複素方向を広げる

将来は大円を

$$C_\alpha = \{[\cos\theta : e^{i\alpha}\sin\theta] \mid \theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\}$$

へ動かし、$q^{-1}(C_\alpha)$ を探索する案があります。初版は $\alpha = 0$ に固定し、大円を動かす操作や「複素全体を表示済み」という説明は入れないでください。

toric・ラインハルト領域との比較

今後、トーラス作用の商、moment map、対数座標での実領域を比較したいです。今回の G は **3 次元部分の表示**、球面は**例外曲線の別表示**で、moment map の像ではありません。球殻状の商表示や Hopf 束も初版では実装しません。

射影平面の 1 点爆発と flow

将来は $\mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^2$ に計量を入れ、Kähler–Ricci flow による例外曲線の収縮を観察したいです。今回の高さ・太さ・半径を縮めるだけの動画を、等長表示や flow と呼ばないでください。初期類・計量・数値解法・表示方法は別途設計します。

25. この文書の保存について

この TeX は初回依頼の原本です。**UTF-8 の LuaLaTeX で 2 回コンパイル**してください。外部画像や BibTeX ファイルは不要です。実装結果・変更履歴・公開範囲の判断は別に記録します。

参考資料

[1] The Stacks Project, *Blowing up*, Tag 01OF. https://stacks.math.columbia.edu/tag/01OF

[2] M. Brodmann and P. Schenzel, *Families of Blowups of the Real Affine Plane: Classification, Isotopies and Visualization*, arXiv:1811.06710v2 (2020). https://arxiv.org/abs/1811.06710v2

[3] Godot Docs, *Introduction to 3D*. https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/3d/introduction_to_3d.html

[4] Godot Docs, *Setting up XR*. https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/xr/setting_up_xr.html

[5] Godot Docs, *The XR action map*. https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/xr/xr_action_map.html

[6] Godot Docs, *Using the ArrayMesh*. https://docs.godotengine.org/en/stable/tutorials/3d/procedural_geometry/arraymesh.html

参照日：2026 年 9 月 8 日。Godot の実装では実際の利用バージョンに対応する資料を確認すること。本書の表示式・初期値・操作案は、この対話に基づく設計案である。