HOLOMORPHONAUTICA

ハルトークス図形 VR 教材

自然言語による実装依頼・引継ぎ原案

元原案の作成日：2026 年 9 月 6 日　版：TeX 整形版

この文書の位置づけ

本書は、研究者が「ちゃぴおくん」（本プロジェクトでの ChatGPT の作業上の愛称）と対話しながら検討した内容を、Codex へ渡す実装依頼として整理した原案である。対話の逐語録でも、一回で入力した依頼文の原文でもない。数学対象・教育目的・操作の希望を自然言語と数式で伝え、相談して絞り込んだ要件を、AI の支援で文書化している。

実装前の設計資料であり、実装済みの成果報告ではない。この原案の作成では、現行リポジトリのソース確認、Hartogs 教材の実装、実機検証は行っていない。後で公開する際も、実際に Codex へ渡した版や、実装後の修正・確認記録とは区別する。数学的な正しさと実機での動作については、研究者が検証・判断する。

本 TeX 版は先の Markdown 原案をもとに、由来の説明と数式・文章の体裁を整えたものとする。教育目的、操作、禁止事項、確認条件は維持している。以下が実装者へ引き継ぐ依頼内容である。

基本の依頼（対話内容の要約）

> 既存の Godot ／ OpenXR ／ Meta Quest 3 の VR 可視化基盤を踏まえ、ハルトークス図形を、z 平面内の実直線で切った 3 次元断面として観察できる教材を実装してください。
> 右スティックの左右で切断直線を平行移動し、上下で回転させます。小さな z 平面のミニマップに現在の切断直線を表示し、それと対応する 3D 領域を描画してください。3D 図形の脇には定義式だけを簡潔に置きます。
> 回転対称性などの結論を先回りして説明する表示は追加しないでください。細かな数値や見た目は、以下の要件を守る範囲で具体化してください。

1　教材の目的と、今回の範囲

想定する観察者は、一変数の複素解析を学び、多変数の正則函数の定義・基礎的性質も学んだ段階の初学者である。古典的なハルトークス拡張の導入で、講師が説明しながら使うグラフィックを目指す。

見せたいのは、z を固定した w 平面が円板になる場所と円環になる場所、その配置、そして元の領域に欠けている部分である。w 平面を丸ごと残すのは、各 z に対する w 変数での円周積分と、$|z| < \rho$ の開集合上で元の函数との一致を確認する議論を、講師が図に結び付けて説明できるようにするためである。

図は観察対象を示す。そこから何を読み取るかは、学習者自身の観察と思考に委ねる。特に、切断直線を回転させたときに何が変わり、何が変わらないかを、自分で確かめられることを重視する。

今回必須なのは「動く切断直線」「対応する 3D 断面」「z 平面のミニマップ」「脇の定義式」である。以前の相談に出た、積分半径を操作する機能、個別の w ファイバー選択、拡張先を塗りつぶすアニメーション、一変数の円環との比較画面、追加の解説ボタンは、今回の必須実装には含めない。相談中の提案をすべて実装する依頼ではない。

2　対象とする数学的集合

座標を $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ とし、次の開集合を使う。

$$H_{\rho,r} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \rho,\ |w| < 1\} \\ \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1,\ r < |w| < 1\}, \qquad 0 < \rho, r < 1.$$

ρ と r は、観察中は固定する。見やすい具体値は Codex が選び、設定として一か所で管理する。利用者が ρ や r を変更するためのスティック割り当てや設定メニューは作らない。定義式の表示、HUD、3D 描画、テストで別々の値を持たない。

実装者の理解のために、拡張先の全体を

$$B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1,\ |w| < 1\}$$

と書く。このとき欠けている集合は、正確には

$$B \setminus H_{\rho,r} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \rho \le |z| < 1,\ |w| \le r\}$$

である。欠損部分の式における $|w| \le r$ と、元の円環部分の $r < |w|$ を混同しない。B や欠損集合の式を利用者向けに常時表示する必要はない。

3　4 次元から 3 次元への落とし込み

3.1　切断直線と表示座標

z 平面内の実直線を

$$L_{a,\theta} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^{-i\theta} z) = a\}$$

とし、その上の点を

$$z = e^{i\theta}(a + is), \qquad s \in \mathbb{R}$$

と表す。a は符号付きのオフセット、$|a|$ は原点から直線までの距離である。θ は法線の角度であり、$\theta = 0$ では直線は $\mathrm{Re}\, z = a$ となる。

$w = u + iv$ と書き、メインの 3D 表示には

$$(s, u, v) = (s, \mathrm{Re}\, w, \mathrm{Im}\, w)$$

を使う。これは $H_{\rho,r}$ と $L_{a,\theta} \times \mathbb{C}$ の交わりを表示する方式である。$|z|$ への圧縮表示・商表示、w 平面の一部を失う断面方式、4 次元全体の投影表示へ置き換えない。

3D 空間での軸の並べ方や図形の置き方は見やすさに応じて選んでよい。ただし、s 軸は切断直線上の座標、残る 2 軸は w 平面の実軸・虚軸であることを、短い軸ラベルで区別できるようにする。

3.2　3D 領域の定義

上の座標では $|z|^2 = a^2 + s^2$ なので、表示対象は

$$D_a = \left\{ (s,u,v) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} a^2+s^2<1, \\ u^2+v^2<1, \\ (a^2+s^2<\rho^2) \text{ または } (u^2+v^2>r^2) \end{array} \right\}.$$

この式を領域判定の基準にする。固定した s での w 断面は次のとおりである。

条件	w 断面
$a^2+s^2<\rho^2$	単位円板：$u^2+v^2<1$
$\rho^2 \le a^2+s^2<1$	円環：$r^2<u^2+v^2<1$
$a^2+s^2 \ge 1$	空

実装者向けの注意：この座標で領域の形は θ に依存しない。θ を動かすと、HUD 上の直線と 3D の各点が表す z の値は変わるが、(s,u,v) 座標での形は変わらない。したがって、角度操作に合わせて 3D 図形を不自然に回転・変形させて「動いている感」を足さない。これは表示の正しさの要件であって、利用者に説明するメッセージではない。

また、この 3D 図は 4 次元領域の実断面であり、それ自体が複素領域でも、拡張定理の証明でもない。中央の区間は、真の複素開集合 $|z|<\rho$ と切断直線との交わりである。「円が縮められるから正則函数が拡張する」など、位相だけで結論が出るような説明を追加しない。

4　操作

入力	この教材での役割
右スティック左右	a を連続変更し、切断直線を平行移動する
右スティック上下	θ を連続変更し、切断直線を回転する
スティックを離す	現在の a と θ で止まる

斜め入力では両方を同時に変えてよい。倒し込みに応じた変化速度、デッドゾーン、角速度、更新頻度などは Codex に任せる。停止後の漂いを防ぎ、ゆっくり観察できることを優先する。

この原案では、これまで相談した a・θ 方式を踏襲し、左右入力は**符号付きオフセット a の増減、すなわち直線の法線方向への平行移動**とする。$\theta = 0$ では HUD 上の左右移動になる。斜めの直線でも常に画面の真横に移す方式を別途要求するものではない。

a の可動範囲は、直線が内側の円を横切る場合、内側の円から外れる場合、外側の円にも交わらなくなる場合を観察できるようにする。回転は、垂直・水平を含めて途切れなく行えるようにする。

角度処理には注意する。符号付き a を使うので

$$L_{a,\theta+\pi} = L_{-a,\theta}$$

であり、a をそのままに θ だけを π で折り返してはいけない。内部では連続角または 2π 周期で扱う。傾き m を用いた $y = mx + b$ の方式へ変更して、垂直な直線で特異になる実装もしない。

左スティックの移動など、既存 VR 基盤の操作は維持する。この右スティック割り当ては Hartogs 教材が操作対象のときにだけ適用し、既存の別教材の入力を勝手に変更しない。追加の専用操作は原則として増やさず、復帰には既存のリセット操作を活用する。キーボードによる代替操作も既存基盤を利用して動作確認できるようにする。

5 画面に出すもの

5.1 メインの 3D 領域

D_a を、w 方向の穴と、円板断面になる区間が見分けられるように描画する。a の変更と同期させる。外側の円柱の輪郭だけが見えて内側の違いが分からない表示にはしない。

半透明の境界面、輪郭線、少数の断面表示など、具体的な描画方式は Codex が選ぶ。色、線の太さ、透明度、メッシュの細かさも固定しない。単純で軽量な方法を優先するが、円板を円周だけで表して円環との違いが失われたり、合併した領域の内部に不要な壁があるように見えたりしないようにする。

数学的な対象は開集合である。輪郭・境界面はその形を示す描画上の表現であり、境界を元の開集合の内部に含めるという意味ではない。

5.2 小さな z 平面の HUD ／ミニマップ

基本の内容は、z 平面の実軸・虚軸、原点、$|z| = 1$ と $|z| = \rho$ の二つの円、そして現在の切断直線だけとする。必要な文字は z、$\mathrm{Re}\, z$、$\mathrm{Im}\, z$、ρ、1 などの短い識別ラベルにとどめる。

HUD の直線上の向きとメイン表示の s 軸の対応が読み取れるよう、短い s の矢印など最小限の手掛かりを付ける。円内の区間の線の濃淡などは見やすさのために使ってよいが、凡例や説明を増やす前に、少ない要素で対応が分かるかを優先する。

HUD は 3D 図形を遮らない場所に置く。顔前固定か世界固定か、寸法、距離、左右どちら側に置くかは、既存基盤と VR での読みやすさを踏まえて Codex が判断する。同じ内容を顔前と世界固定の両方へ重複表示しない。

a や θ の数値一覧、直線方程式、デバッグ情報、長い操作説明の常時表示は必須ではなく、初期の教材画面には原則として載せない。動作確認用表示が必要なら、通常表示と分離する。

直線が単位円から外れて 3D 断面が空になった場合も、HUD の二つの円と直線は表示を続ける。

5.3 3D 図形の脇に置く定義式

3D 図形の横の、観察を邪魔しない場所に、ハルトークス図形の定義式だけを簡潔に置く。例えば次のように 2 行程度へ折り返す。

$$H_{\rho,r} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \rho,\ |w| < 1\} \\ \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1,\ r < |w| < 1\}, \qquad 0 < \rho, r < 1.$$

書体や改行、配置、数式の描画手段は Codex に任せる。実際の領域と定義式を一致させ、w 平面の観察や図形の穴を妨げないことを優先する。定義式の横に定理・証明・発見のヒントを追記しない。

5.4 追加しない表示

“same geometry (rotation symmetry)”、「回転対称なので形は変わりません」、「ここが拡張されます」などの、観察から得られる結論を自動で教える通知・字幕・解説は追加しない。θ を動かした瞬間だけの短い表示も不採用である。

対称性は、HUD の切断直線と 3D 領域を見比べて学習者が自分で気付く対象である。直線の移動・回転自体は正しく表示し、理解を助ける軸ラベルと、理解の結論を教える文章とを区別する。

6 既存プロジェクトとの接続と作業上の制約

過去の引き継ぎ資料では、Godot ／ OpenXR ／ Quest 3 の環境と、`VRBase`・`ParameterRouter`・数学 module を分離する基盤が整備されている。これは過去資料に基づく情報であり、現在のソース構成・起動シーン・入力設定は作業開始時に確認すること。Godot の細かなバージョンやノードのパスを、この文書だけから決め打ちしない。

最初にリポジトリ内の作業指示、`git status`、`git diff`、現行のシーンと入力・HUD の実装を読んで、接続方法を決める。古い資料に記載されたコミットへ勝手に戻さない。

Hartogs の領域計算と表示は、既存の楕円曲線の処理を書き換えるのではなく、新しい教材 module または独立して起動できる教材シーンとして追加する方向を優先する。既存の Cover ／ Morse 表示、その対応関係、移動・切替・リセットを壊さない。再利用のためだけの大規模なリファクタリングは行わない。

ファイルの削除・移動・大量リネーム、大規模書換え、外部パッケージ追加は事前確認を必要とする。`git reset --hard`、`git clean -fd`、履歴改変、force push は明示許可なしで行わない。プロジェクトを同期フォルダなどへ勝手に移動しない。認証情報や秘密情報をコード・ログに入れない。

変更は小さな単位に分け、テスト結果と差分を確認できる節目を作る。既存プロジェクトのコミット方針に従う。

7 Codex に任せること

ρ と r の固定値、a の可動範囲と初期値、θ の初期値、操作速度とデッドゾーン、図形の大きさと置き場所、HUD と定義式の配置・文字サイズ、色と透明度、メッシュ分割数、描画方式、ファイル・クラス構成は、Codex が現行環境を確認して決めてよい。

数学的に同じ集合を描くこと、w 平面を残すこと、右スティックの 2 軸で直線を操作すること、HUD を簡潔にすること、結論を先回りして説明しないことは変更しない。細かな数値の決定のためだけに作業を止めず、まず妥当な値を採用して、後で調整しやすい場所へまとめる。

標準図形については、$|a| < 1$ のときの外側の s 区間は

$$|s| < \sqrt{1 - a^2},$$

さらに $|a| < \rho$ のときの円板断面の区間は

$$|s| < \sqrt{\rho^2 - a^2}$$

と直接計算できる。このような単純な構造を活用してよい。高密度の 4 次元サンプリングや、毎フレームの重い再生成を前提にしない。θ のみが変わる場合に 3D メッシュを再生成する必要はない。

8 最低限の確認項目

以下は実装者向けの確認項目であり、教材の画面に出す解説ではない。数式上の期待値は、本書の $H_{\rho,r}$ と D_a の定義から直接導く。

確認	期待する結果
$a = 0$	s の中央区間は円板断面、両側は円環断面になる。
$0 < \|a\| < \rho$	円板断面になる区間が、内側の円と直線の交わりに対応する。
$\rho \le \|a\| < 1$	円板断面の区間は存在せず、円環断面のみになる。接する場合 $\|a\| = \rho$ も確認する。
$\|a\| \ge 1$	3D 断面は空になり、HUD には直線と二つの円が残る。
a を固定して θ だけを連続変更	HUD 上の直線は回転するが、(s, u, v) での 3D 形状は変わらない。結論の通知は出ない。
θ が π や 2π をまたぐ	直線や対応する座標の表示が不連続に飛ばない。
入力を離す／リセットする	値が意図どおり止まり、既存の操作方針に沿って初期状態に戻れる。
HUD・式・他教材	文字が図形に重ならず、別教材の操作や表示が壊れていない。

$|a| = \rho$ で、消えるはずの中央部分を厚さゼロの円板として残さない。$|a| = 1$ でも、存在しない断面を厚さゼロの面として描かない。負数の平方根、不要な退化メッシュ、境界付近のちらつきを防ぐ。数値誤差対策は行ってよいが、領域の定義を大きく変えるものにしない。

数学部分の自動テスト、シーン・入力の接続確認、デスクトップでの確認、Quest での目視確認は区別して報告する。実機を使っていない場合に「VR 確認済み」と書かない。

9　実装終了時に残すもの

動作する教材とともに、起動するシーン／入口、操作方法、調整用設定の場所、変更した主なファイル、実行したテストと結果、実機でまだ確認していない点を短い記録に残す。数値や表示方式の選定理由も簡潔に記録する。

初回実装の完了基準は、**「切断直線を操作し、HUD と 3D 領域を見比べ、定義式を参照しながら観察できること」**である。自動講義、函数値の計算、証明のアニメーション、多数の表示モードまで作り込むことではない。

参照・由来（教材画面には表示しない）

本書の教材目的、表示方式、操作割り当て、$\rho \cdot r$ を固定する方針、HUD と定義式の方針、結論表示の不採用は、元原案が 2026 年 9 月 6 日の相談として記録した内容に基づく。直線の周期、領域判定、境界条件は、採用した定義から計算して明記している。

既存 VR 基盤と作業制約は、2026 年 8 月 27 日の楕円曲線 VR 引き継ぎ資料および実験ノートを参照した元原案の記載を引き継いでいる。これらは履歴資料として扱い、実装時にはリポジトリ現物を確認する。内部資料そのものの公開を前提とするものではない。

数学的背景の参考（元原案に記載）：Aleksander Simonič, *Elementary approach to the Hartogs extension theorem*, arXiv:1608.00950。本書の切断図形の式とテスト条件は、外部資料の図を流用したものではなく、本書の定義からの直接計算である。