Levi-flat VR 可視化：Codex 引継ぎ用設計メモ
Nemirovski 型と Diederich–Ohsawa 型

2026 年 9 月

1　この文書の目的

本メモは、Levi-flat hypersurface の二つの具体例

(1) Nemirovski 型、
(2) Diederich–Ohsawa 型（suspension / disc-bundle 型）

を 3D VR で可視化するプロジェクトについて、ここまでの数学的・UI 的な設計判断を Codex に引き継ぐための仕様書である。

目的は、単にきれいな曲面を描くことではなく、

Levi 葉層と、その非自明な holonomy / monodromy を「見て触れる」

ことである。

両モデルで UI、色の意味、視点操作などは可能な限り統一する。一方、数学的本質は異なるため、可視化の主役は意図的に変える。

	Nemirovski 型	Diederich–Ohsawa 型
主役	compact leaf の局所近傍	global suspension holonomy
底空間で動かすもの	局所 z 平面内の実直線	genus 2 曲面上の実曲線 / loop
表示する主断面	Levi-flat ∩ base line	circle bundle の curve 上への制限
本質的 dynamics	multiplicative holonomy	Möbius holonomy

2　共通の可視化原則

2.1　必ず Levi 葉層を描く

単なる underlying real manifold の描画では不十分である。両モデルとも、断面上に複数の Levi leaf / leaf trace を明示的に描画する。

特に、holonomy の固定点や compact leaf が数学的に存在し、かつ現在の表示範囲に入っている場合には、それを必ず含める。

2.2 色と UI の意味を統一する

具体的な RGB 値などは実装側で決めてよいが、少なくとも以下の「意味」は両モデルで統一する。

- 通常の sample leaves / leaf traces：同じ系統の表示。
- compact leaf または holonomy 固定点に対応する closed trace：特別な強調表示。
- 現在選択中の base line / base curve：両モデルで同じ意味の強調表示。
- attracting / repelling の区別を表示する場合も、両モデルで同じ記号または同じ視覚文法を用いる。

2.3 視点移動

ユーザーは対象へ近づいたり、回り込んだりして観察できること。数学パラメータ操作と視点操作が競合しすぎないようにする。

希望する基本思想は

- 片方のスティック：視点移動を専任、
- もう片方のスティック：現在選択されている数学パラメータを変更、
- 少数のボタン：変更対象パラメータやモデルを切り替える、

程度に留めることである。複雑なボタン chord や、多数のモードを覚えさせる UI は避ける。

2.4 二モデル同時表示について

理想は Nemirovski 型と Diederich–Ohsawa 型を同時に表示して比較できることである。ただし、これは必須ではない。

Codex は

1. VR フレームレート、
2. leaf 数・mesh 密度、
3. コントローラー操作の単純さ、
4. 観察時の視認性

を見て、以下のいずれかを選択してよい。

- side-by-side 同時表示、
- 同一 scene 内での model toggle、
- 二つの scene を即座に切り替える方式。

同時表示のために leaf 描画を極端に粗くしたり、操作系を複雑化したりすることは避ける。

3　Nemirovski 型：今回実装する範囲

3.1　スコープ

今回考えるのは

Phase 1: 純局所 Nemirovski

のみである。

実装対象は

1. simple zero の局所模型 $s(z) = z$、
2. simple pole の局所模型 $s(z) = 1/z$

の二つ。

以下は **future work** とし、今回の実装には要求しない。

- elliptic curve 上の global Nemirovski model、
- zero / pole 近傍を product region で接ぐ semi-local model、
- Weierstrass $\wp$、σ、theta function 等を使う explicit global section、
- flat twist を用いた divisor の “ずらし”、
- global complex torus 内での完全な実装。

3.2　局所 zero model

base coordinate を z、fiber coordinate を w とする。simple zero $s(z) = z$ の場合、Levi-flat の lift は

$$M_0 = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : \Im\left(\frac{z}{w}\right) = 0 \right\}.$$

fiberwise scaling

$$(z, w) \longmapsto (z, rw), \qquad r > 1,$$

で商を取る。

■便利な実座標.

$$w = e^{u+i\theta}, \qquad t := \frac{z}{w} \in \mathbb{R}.$$

すると

$$z = t\, e^{u+i\theta}.$$

deck transformation は

$$(u, \theta, t) \longmapsto (u + \log r, \theta, t/r).$$

u の fundamental interval を

$$0 \le u \le \log r$$

とすると、境界貼り合わせは

$$(\log r, \theta, t) \sim (0, \theta, rt).$$

compact Levi leaf は

$$\boxed{t = 0}$$

であり、これは

$$\mathbb{C}^*/r^{\mathbb{Z}}$$

型の elliptic curve（real 2-torus）である。

正の u 方向の fundamental loop に沿った transverse holonomy は、この convention では

$$\boxed{t \longmapsto rt}.$$

逆向きに回れば $t \mapsto t/r$ となる。したがって「expanding / contracting」は向きに依存するが、zero と pole で互いに逆の挙動になることが重要である。

■leaf の lift.　商を取る前では

$$t = \text{constant}$$

が Levi leaf である。商を取った後、一つの leaf の lift は

$$t, \quad rt, \quad r^2t, \quad \dots$$

（または逆向き）の family として現れる。

■3D 埋め込み用の periodic transverse coordinate.　表示上、u を周期座標として普通の torus neighborhood に埋めたい場合には、

$$y = e^u t$$

と置くと boundary gluing と整合的な transverse coordinate になる。lift 上で $t = c$ の leaf trace は

$$\boxed{y = c\, e^u}$$

という指数型の trace として表現できる。これは表示座標であり、Levi leaf 自体の first integral はあくまで lift 上の t であることに注意する。

3.3　局所 pole model

simple pole $s(z) = 1/z$ の場合、

$$M_\infty = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* : \Im(zw) = 0\}.$$

$$w = e^{u+i\theta}, \qquad t := zw \in \mathbb{R}$$

とすれば

$$z = t\, e^{-u-i\theta}.$$

deck transformation は

$$(u, \theta, t) \longmapsto (u + \log r, \theta, rt),$$

したがって fundamental interval の貼り合わせは

$$(\log r, \theta, t) \sim (0, \theta, t/r).$$

compact Levi leaf は再び

$$\boxed{t = 0}.$$

正の u 方向の holonomy は

$$\boxed{t \longmapsto t/r},$$

zero model と逆向きである。

periodic transverse coordinate として

$$y = e^{-u}t$$

を使えば、lift 上の $t = c$ の leaf trace は

$$\boxed{y = c\,e^{-u}}$$

として表示できる。

したがって zero / pole の二つを並べると、同じ compact torus leaf の周囲で指数的な transverse dynamics の向きが反転する様子を見せられる。

4 Nemirovski 型：base slicing UI

4.1 切る実直線

局所 base z-plane の実直線を、例えば

$$\boxed{L_{\phi,d} = \left\{e^{i\phi}(x + id) : x \in \mathbb{R}\right\}}$$

とパラメータ化すると便利である。

ここで

- ϕ：直線の角度、
- d：原点からの signed offset

であり、

$$d = 0$$

のとき、そしてそのときに限り、直線は $z = 0$ を通る。

コントローラーで ϕ, d を動かせるようにすることを想定する。

4.2 base navigator

3D 表示の横または近傍に、z-plane の簡潔な navigator を常時表示する。そこに

- $z = 0$、
- 現在の直線 $L_{\phi,d}$、
- 必要なら現在表示している local window

を描く。

ユーザーは navigator を見ながら直線を動かし、zero model / pole model の 3D slice と見比べる。

4.3 compact leaf の表示要件

$$d = 0$$

すなわち slicing line が $z = 0$ を通る場合は、

$$\boxed{\text{compact Levi leaf を必ず描画する。}}$$

重要：slice 条件 $z \in L_{\phi,0}$ と compact leaf $z = 0$ の交わりでは dimension の見え方が通常部分と異なるため、一枚の滑らかな slice mesh に無理に統合する必要はない。実装上は

- ordinary sliced sheets、
- full compact torus leaf

を別 mesh / 別 draw call として表示してよい。数学的に compact leaf が存在することが明瞭に見えることを優先する。

4.4 sample leaves

ordinary leaves は複数本（または複数の薄い surface / trace）を描き、compact leaf へ近づく holonomy dynamics が視覚的に読める密度にする。

leaf 数は固定しすぎず、性能との兼ね合いで調整可能にする。ただし compact leaf 周辺の挙動が読めないほど疎にしない。

5 Diederich–Ohsawa 型：基本モデル

5.1 数学的構成

genus 2 の compact Riemann surface

$$\Sigma_2$$

を考える。基本群は

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = 1 \rangle .$$

表現

$$\rho : \pi_1(\Sigma_2) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

から suspension を作る。

universal cover を $\widetilde{\Sigma}_2$ とすれば、

$$D_\rho = (\widetilde{\Sigma}_2 \times \mathbb{D})/\pi_1(\Sigma_2)$$

であり、その boundary

$$\boxed{M_\rho = (\widetilde{\Sigma}_2 \times S^1)/\pi_1(\Sigma_2)}$$

が Levi-flat circle bundle である。

universal cover 上の Levi leaves は

$$\widetilde{\Sigma}_2 \times \{\xi\}, \qquad \xi \in S^1.$$

holonomy はそのまま

$$\boxed{\rho : \pi_1(\Sigma_2) \to \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)}$$

である。

5.2 今回の explicit representation 候補

計算・描画の簡単さを優先し、まずは次を minimal explicit model として採用する候補とする：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\alpha_1) &= A, \\ \rho(\beta_1) &= B, \\ \rho(\alpha_2) &= B, \\ \rho(\beta_2) &= A. \end{aligned}}$$

すると

$$[A,B][B,A] = I$$

なので surface-group relation を満たし、

$$\rho : \pi_1(\Sigma_2) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

が得られる。

A, B は

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B = 3$$

なので hyperbolic である。

■A の boundary dynamics.　upper half-plane boundary

$$\partial\mathbb{H} = \widehat{\mathbb{R}}$$

では

$$A(t) = \frac{2t+1}{t+1}.$$

固定点は

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

■B の boundary dynamics.

$$B(t) = \frac{2t-1}{1-t},$$

固定点は

$$t_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

■commutator.

$$[A, B] = -\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

したがって $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ では

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$t \longmapsto t + 6$$

という parabolic transformation になる。

この一つの representation だけで

- generator loop 上の hyperbolic holonomy、
- separating commutator loop 上の parabolic holonomy

を比較できる。

5.3 重要な位置づけ

上の

$$\rho : \pi_1(\Sigma_2) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

は、Σ_2 自身を uniformize する cocompact Fuchsian representation ではない。

base の uniformization

$$\Sigma_2 \simeq \mathbb{D}/\Gamma_0$$

を与える cocompact Fuchsian group Γ_0 と、fiber monodromy として使う上記の ρ は区別する。

しかし、Diederich–Ohsawa / Adachi の一般 suspension construction の explicit example としては正当であり、今回の目的

nontrivial Levi holonomy を明示的な 2×2 行列で可視化する

には非常に適している。

本当に uniformizing Fuchsian representation を使う Bolza surface 等のモデルは future work とする。

6 Diederich–Ohsawa 型：curve restriction と 3D 表示

6.1 base curve

base Σ_2 は、VR 内では

「二人乗り浮き輪」のような standard embedded double torus

として表示してよい。

これは conformal / hyperbolic metric を $\mathbb{R}^3$ に忠実に埋め込んだものではなく、**位相的 navigator** であることを UI 上で誤解のないようにする。

標準 generator

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$$

および、必要なら

$$\delta = [\alpha_1, \beta_1]$$

に対応する representative loops が分かるようにする。

現在選んでいる実曲線

$$c \subset \Sigma_2$$

を navigator 上で強調表示し、コントローラーで representative を動かして観察できるようにする。

6.2 curve 上への circle bundle の制限

c が閉 loop で

$$[c] = \gamma \in \pi_1(\Sigma_2)$$

なら、M_ρ の c 上への制限は

$$\boxed{M_\rho|_c = ([0,1] \times S^1)/\big((1,\xi) \sim (0, \rho(\gamma)\xi)\big)}$$

である。

これは circle diffeomorphism

$$h = \rho(\gamma)|_{S^1}$$

の mapping torus。

位相的には通常 T^2 だが、今回可視化したいのは torus の形ではなく、その上の **suspension foliation / leaf traces** である。

6.3 leaf traces

universal-cover trivialization 上では ξ は leaf に沿って一定。一周後に fiber identification を行うと

$$\xi \longmapsto h(\xi) = \rho(\gamma)\xi.$$

したがって Poincaré return は

$$\xi, \quad h(\xi), \quad h^2(\xi), \quad \dots$$

という Möbius orbit そのものになる。

$$\boxed{\text{Levi holonomy} = \text{Möbius dynamics}}$$

を直接見せることが、このモデルの主要目的である。

6.4 固定点は必ず表示する

$h = \rho(\gamma)$ が hyperbolic なら、S^1 上に attracting / repelling fixed points が二つある。これらに対応する suspension trace は、mapping-torus slice 上で閉じる。

したがって

fixed points が現在の描画範囲にあるなら、対応する closed leaf traces を必ず描画する。

parabolic の場合は boundary fixed point が一つなので、対応する一本の closed trace を必ず描画する。

■数学的注意. ここでの “closed leaf trace” は、選んだ base loop 上の 2 次元 mapping-torus slice において閉じる 1 次元 trace である。

これは一般には

full 3-dimensional Levi-flat M_ρ の compact complex Levi leaf

そのものとは限らない。UI の label では “fixed-point closed leaf trace” 等の表現を使い、compact Levi leaf と誤認させないこと。

対照的に Nemirovski 型の $t = 0$ は、実際に full Levi foliation の compact complex leaf である。

6.5 fiber を S^1 として描く

行列は upper half-plane boundary

$$\widehat{\mathbb{R}}$$

への fractional linear transformation として計算してよい。

3D 表示では Cayley transform、例えば

$$\mathcal{C}(t) = \frac{t - i}{t + i}$$

を用いて

$$\widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow S^1$$

へ移し、fiber を普通の circle として描画できる。$t = \infty$ は $1 \in S^1$ に対応する。

6.6 一周内の interpolation について

mapping torus で数学的に本質的なのは

return map $h = \rho(\gamma)$

である。

一周の途中で fiber coordinate をどのように連続的に補間して torus 上へ描くかは、trivialization / isotopy の選び方に依存する。したがって Codex は、見やすく数値的に安定な orientation-preserving isotopy

$$h_s : S^1 \to S^1, \qquad h_0 = \mathrm{id}, \quad h_1 = h$$

を選んでよい。

ただし

- return map の fixed-point structure、
- attracting / repelling / parabolic dynamics、
- h^n の orbit

は数学的に正しく保持すること。

7 Diederich–Ohsawa 型：base navigator と操作

7.1 基本表示

画面内に

1. base double torus navigator、
2. 現在選択中の real curve / loop、
3. その curve 上の S^1 bundle の 3D slice、
4. その slice 上の sample leaf traces

を対応づけて表示する。

可能なら現在の homotopy word

$$\gamma = \alpha_1^{\pm 1}\beta_1^{\pm 1}\cdots$$

と

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

も小さく表示する。

さらに

$$|\mathrm{tr}\rho(\gamma)| \begin{cases} > 2 & \text{hyperbolic,} \\ = 2 & \text{parabolic,} \\ < 2 & \text{elliptic} \end{cases}$$

という classification を表示してもよい。

7.2 “ぐりぐり動かす” ことの数学的意味

flat bundle なので、base curve を連続変形しても homotopy class が変わらなければ holonomy は変わらない。

したがって

$$c_s \simeq c_0$$

の範囲で curve を動かしている間、

$$\rho([c_s])$$

は一定でよい。

これはバグではなく、

holonomy が局所的な形ではなく homotopy class を読む

ことを可視化する重要な feature である。

curve が handle / cut を越えて homotopy word が変わったときに、holonomy と leaf trace が変化するようにする。

7.3 最小実装と拡張実装

Codex は UI 複雑度を見て、初期版では以下のどちらを選んでもよい。

■Minimal. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, [\alpha_1, \beta_1]$ など数本の代表 loop を選択し、それぞれを局所的に deform できる。

■Extended. ユーザーが base 上で loop を描き、標準 cut / gate の crossing から word を生成し、$\rho(\gamma)$ をリアルタイム計算する。

初期版で Extended UI が操作を複雑にするなら、Minimal を優先する。

8 二つのモデルの対比として見せたいこと

最終的にユーザーが体感すべき対比は次である。

Nemirovski

compact Levi leaf のすぐ近くで、transverse coordinate が multiplicatively 収縮 / 膨張する

zero / pole によりその向きが逆転する。

base で動かすのは局所的な実直線であり、zero / pole の特異な fiber の近くを観察する。

Diederich–Ohsawa

base の global loop を一周すると、fiber circle に Möbius transformation が作用する

base で動かすのは global real curve / loop であり、その homotopy class が monodromy を決める。

共通点

両方とも

固定された leaf / closed trace の周囲で holonomy がどう働くか

を主役にする。

9 Codex への実装判断の委任事項

以下は数式仕様ではなく、Codex が実装上判断してよい。

1. 二モデルを side-by-side で常時描画するか、toggle するか。
2. leaf / trace の本数と mesh density。
3. torus neighborhood の具体的な $\mathbb{R}^3$ 埋め込み。
4. double torus mesh の生成方法。
5. mapping torus 内の isotopy interpolation。
6. controller の左右割り当て。
7. model / parameter switch に使うボタン数。
8. performance を保つための LOD、culling、GPU mesh 等。

ただし、以下は変更しない。

- 視点移動は自由にできる。
- 数学パラメータ操作は少数の controller input に留める。
- Nemirovski の compact leaf は該当 slice で必ず表示する。
- Diederich–Ohsawa の fixed-point closed traces は該当する場合必ず表示する。
- ordinary leaves / traces も複数表示し、holonomy が見えるようにする。
- base navigator と 3D slice の対応が常に分かるようにする。
- 二モデルの色・UI の意味を揃える。
- performance のために数学的本質を消さない。

10 今回の non-goals / future work

- Nemirovski 型の global elliptic-curve realization。
- $\wp$、σ、theta function を使う explicit divisor / section。
- zero / pole の global gluing。
- Diederich–Ohsawa 型で base の hyperbolic metric を忠実に VR 埋め込みすること。
- Bolza surface の regular hyperbolic octagon と、その uniformizing Fuchsian group の完全実装。
- 任意の surface-group representation を GUI から入力すること。
- full ambient complex surface の 4 real dimensions を一つの 3D 埋め込みで表現すること。

これらは、Phase 1 が軽快かつ数学的に成功した後の拡張候補とする。

11 実装時の最低限のチェック項目

1. Nemirovski zero model と pole model で holonomy の向きが逆になっているか。
2. $d = 0$ の Nemirovski slice で compact torus leaf が必ず見えるか。

3. compact leaf 近傍に複数の ordinary leaf traces が見えるか。
4. Diederich–Ohsawa の α_1 slice で A の二つの fixed points に対応する closed traces が見えるか。
5. β_1 でも同様に B の二つの fixed-point traces が見えるか。
6. $[\alpha_1, \beta_1]$ では parabolic holonomy と一本の fixed-point trace が見えるか。
7. base curve を同じ homotopy class 内で deform したとき、holonomy が不変であるか。
8. base navigator と 3D slice の選択が視覚的に対応しているか。
9. 視点移動中も数学パラメータを誤操作しにくいか。
10. 二モデル同時表示を採用した場合、性能・視認性・操作性が悪化していないか。

12 背景文献メモ

実装上の数式は本メモを直接使えばよいが、数学的背景を確認する際の主要文献は以下。

- S. Yu. Nemirovski, *Stein domains with Levi-flat boundaries on compact complex surfaces*, Math. Notes **66** (1999), 522–525.
- K. Diederich and T. Ohsawa, *Harmonic Mappings and Disc Bundles over Compact Kähler Manifolds*, Publ. RIMS **21** (1985), 819–833.
- K. Diederich and T. Ohsawa, *On the Displacement Rigidity of Levi Flat Hypersurfaces—The Case of Boundaries of Disc Bundles Over Compact Riemann Surfaces*, Publ. RIMS **43** (2007), 171–180.
- T. Ohsawa, survey articles on Levi-flat hypersurfaces, especially discussions of disc bundles and torus-bundle / Nemirovski-type examples.
- M. Adachi, expository and research articles on Levi-flat hypersurfaces, suspension constructions, flat circle bundles, and holonomy.

一行での設計要約

Nemirovski: base の局所直線を動かし、compact leaf 周辺の multiplicative holonomy を見る。 Diederich–Ohsawa: genus-2 base の loop を動かし、fiber S^1 上の Möbius holonomy を見る。