集中講義１日目

多変数の複素解析

小池 貴之
筑波大学

出発点：一変数で学んだこと

以下は既習事項として使う．必要な箇所で式を思い出す．

- 正則関数, Cauchy–Riemann 方程式, 冪級数と収束半径.
- Cauchy の積分定理・積分公式, Morera の定理.
- 一致の定理, 最大値原理, 開写像定理, Liouville の定理.
- Laurent 展開, 孤立特異点, 有理型関数, 留数定理.
- コンパクト上一様収束, Montel の定理.
- Riemann 球面, 有理関数, Möbius 変換.

何度も使う道具：Cauchy の公式

$a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して $\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ と書く.

定理 (Cauchy の積分公式・評価)

$f \colon \Delta_R(a) \to \mathbb{C}$ が正則なら, $0 < r < R$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta, \qquad |f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|\zeta - a| = r} |f(\zeta)|.$$

□

- 正則関数は局所的に収束冪級数で表される. つまり解析的でもある. 特に C^∞ 級.
- 局所一様極限は正則. 局所有界な正則関数族には Montel の定理が成り立つ.

ここから, 劣調和関数を復習して多変数へ進む.

劣調和関数：中心の値と円周平均

$U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする.

定義

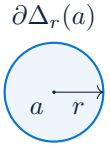
上半連続関数 $u\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が劣調和とは, 任意の $\overline{\Delta_r(a)} \subset U$ に対して

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{\sqrt{-1}\theta})\, d\theta$$

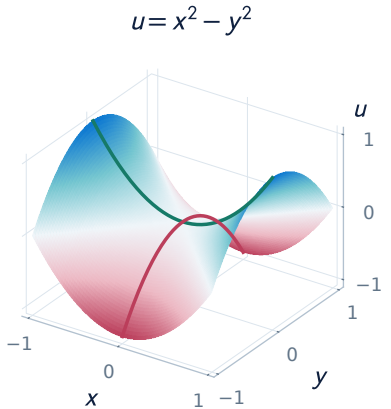
が成り立つことをいう. $u \equiv -\infty$ も許す. □

上半連続とは $\limsup_{z \to a} u(z) \leq u(a)$.

中心の値を, 円周上の値の平均と比べる.



鞍型のグラフは劣調和だろうか？



固定例 sh / std-b03. 観察：回転・実直線切断・円周ヒント.

図の操作：HTML 版の同じページを開く

$$u(z) = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2.$$

実直線で切ると，上向きの放物線も下向きの放物線も現れる.

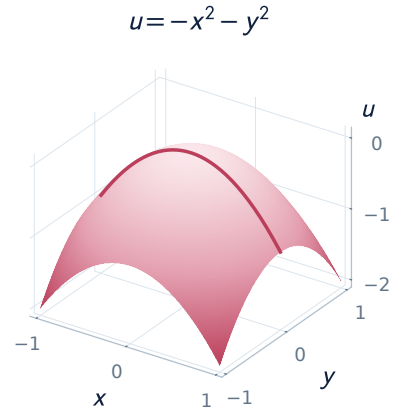
原点を中心とする円では

$$u(re^{\sqrt{-1}\theta}) = r^2 \cos 2\theta.$$

円周平均は $0 = u(0)$.

鞍型でも調和，したがって劣調和.

山型のグラフと円周平均



$$u(z) = -|z|^2.$$

原点の値は 0. 半径 r の円周上では, すべて $-r^2$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{\sqrt{-1}\theta})\,d\theta = -r^2 < 0.$$

円周平均の不等式に反する.
符号を逆にした $|z|^2$ は劣調和.

固定例 sh / std-b02. 観察：原点を中心とする円周と, 中心の高さ.

図の操作：HTML 版の同じページを開く

最大値原理と基本性質

定理 (最大値原理)

領域 $U \subset \mathbb{C}$ 上の劣調和関数 u が, その上限を U の内点で達成すれば, u は定数である.□

命題

劣調和性は, 有限個の最大値, 和, 正の定数倍, 単調減少極限で保たれる. □

例

調和関数 h と $-h$ はともに劣調和. また, 正則関数 f に対して $\log|f|^2$ は劣調和である.

$$\max\{0, \operatorname{Re} z\}, \qquad \log|z|^2 \quad (\log 0 := -\infty).$$

□

複素微分と ∂, $\overline{\partial}$

$z = x + \sqrt{-1}y$ とし, $dz = dx + \sqrt{-1}\,dy$, $d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}\,dy$ と書く.

定義

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

C^∞ 級関数 f に対して

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z}\,dz, \qquad \overline{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}.$$

□

微分形式にも係数の微分と Leibniz 則で拡張すると,

$$d = \partial + \overline{\partial}, \qquad \partial^2 = \overline{\partial}^{\,2} = 0, \qquad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$$

C^2 級の場合：二階微分で判定する

ラプラシアンの符号は

$$\Delta := -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = -\frac{1}{4}\Delta u$$

定理

U 上の実数値の C^2 級関数 u に対して

$$u \text{ は劣調和} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta u \leq 0.$$

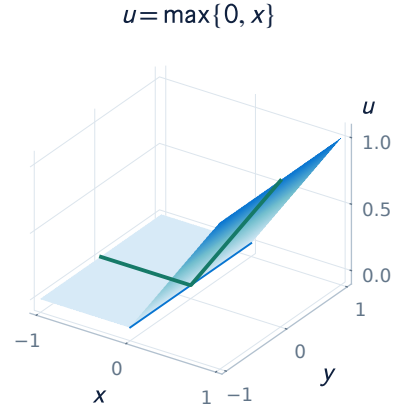
□

円周平均の Taylor 展開は

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{\sqrt{-1}\theta})\, d\theta - u(a) = -\frac{r^2}{4}\Delta u(a) + o(r^2).$$

対話図の「ラプラシアン測度」は, この記号では $-\Delta u$.

折れ目があっても劣調和



固定例 sh / std-i02. 後の超函数の例へつなぐ.

図の操作：HTML 版の同じページを開く

$$u(z) = \max\{0, \operatorname{Re} z\}.$$

二つの調和関数 0 と $\operatorname{Re} z$ の最大値.

$x = 0$ に折れ目があり, C^1 ではない.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{0, r\cos\theta\}\, d\theta = \frac{r}{\pi}.$$

二階微分が通常の関数でなくても,
劣調和性は定義できる.

超函数：微分を試験関数へ移す

定義

$C_c^\infty(U)$ は, U 上のコンパクト台を持つ C^∞ 級関数の空間. その連続線形汎関数を超函数といい, 全体を $(C_c^\infty(U))^\vee$ と書く（位相は次のスライド）. □

例

局所可積分関数 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ と点 $a \in U$ は, それぞれ

$$T_u(\varphi) = \int_U u\varphi \, d\lambda, \qquad \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

により超函数を定める. $d\lambda$ は Lebesgue 測度. □

部分積分に合わせて, 超函数の微分を定義する：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(\varphi) := -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \qquad (\Delta T)(\varphi) = T(\Delta\varphi).$$

関数空間の位相に関する補足

$K_\nu \subset \operatorname{Int} K_{\nu+1}$, $U = \bigcup_{\nu\geq 0} K_\nu$ を満たすコンパクト集合列を取り, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\rho_{\nu,m}(f) := \max_{p+q\leq m} \sup_{(x,y)\in K_\nu} \left| \frac{\partial^{p+q} f}{(\partial x)^p (\partial y)^q}(x,y) \right| \qquad (p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

定義

Fréchet 空間とは, 可算個の半ノルムで位相が定まる, 完備な Hausdorff 局所凸位相線形空間. □

例

上の半ノルムで $C^\infty(U)$ は Fréchet 空間. 台を $\operatorname{Supp}\varphi := \overline{\{\varphi \neq 0\}}$ と書くと, $C^\infty_{K_\nu} := \{\varphi \in C^\infty(U) \mid \operatorname{Supp}\varphi \subset K_\nu\}$ は閉部分空間である. このとき $C^\infty_c(U) = \varinjlim_\nu C^\infty_{K_\nu}$ に, 各包含を連続にする最強の**局所凸位相**を入れる. 各段階が閉埋込みなので, これは strict countable LF 空間となる. □

一般の劣調和関数と $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$

定理

領域 $U \subset \mathbb{C}$ 上の劣調和関数 $u \not\equiv -\infty$ は局所可積分. 実数値の $L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ 同値類 v に対し,

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} v \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v \text{ は一意の劣調和代表元を持つ.}$$

□

≥ 0 は, 任意の非負試験関数 $\varphi \in C_c^\infty(U)$ に対して $(\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} v)(\varphi) \geq 0$ という意味. C^2 級なら $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} v = -\frac{1}{2}(\Delta v)\, dx \wedge dy$.

例

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial} \log |z|^2 = \delta_0.$$

$\log |z|^2$ の原点での特異性が, Dirac 測度として現れる. □

ここから $\mathbb{C}^n$ へ：記号と正則関数

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする．連結な開集合を領域という．

$$z = (z_1, \dots, z_n), \qquad z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j, \qquad |z|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2.$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$, $r_1, \dots, r_n > 0$ に対して $P(a; r_1, \dots, r_n) := \prod_{j=1}^{n} \Delta_{r_j}(a_j)$ を多重円板という．

定義

$f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則とは，任意の $a \in \Omega$ と j に対して

$$w \longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, w, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

が $w = a_j$ の近傍で一変数の正則関数となることをいう． □

同時連続性は仮定していない．実関数では「変数ごとに連続」でも連続とは限らなかったが……？

Hartogs の分離正則性定理

多重指数 $k = (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対して

$$|k| := k_1 + \cdots + k_n, \qquad (z-a)^k := (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n}$$

定理 (Hartogs)

各変数について別々に正則な $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は, 各点 a のある近傍で一様収束する冪級数

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{\substack{k \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \\ |k| \leq N}} c_k (z-a)^k$$

で表される. 特に C^∞ 級で, $\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \, d\overline{z}_j = 0$. □

別々の正則性から, すべての変数を合わせた正則性が従う.
連続性・局所有界性を仮定に追加してはいない. 証明は省略する.

一致の定理：開集合で一致すること

定理

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上で, 次が成り立つ.

- 非空開集合上で一致する正則関数は, Ω 全体で一致する.
- 正則関数 f の $|f|$ が内点で局所最大を取れば, f は定数.
- 局所一様極限は正則. 局所有界な正則関数族には Montel の定理が成り立つ.

□

例

$f(z, w) = z$ は $\mathbb{C}^2$ 上で正則で,

$$f(0, 1/\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad f(1, 0) = 1.$$

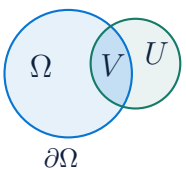
零点列 $(0, 1/\nu)$ は $(0, 0)$ に収束する. 集積点をもつ集合で消えても, 恒等的に 0 とは限らない. □

正則関数の「自然な定義域」は？

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数全体を $\mathcal{O}_\Omega(\Omega)$ と書く.

定義 (正則領域)

領域 Ω が正則領域とは, $\partial\Omega$ と交わる任意の連結開集合 U と, $U \cap \Omega$ の各連結成分 V に対し, ある $f \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)$ が存在し, $f|_V$ が U 全体へ正則に延長できないことをいう. □



一変数では, $a \in \partial\Omega$ に対する $(z-a)^{-1}$ がその境界点を越える延長を妨げる.

Hartogs 図形では，すべての正則関数が延びる

$\Delta_t := \Delta_t(0)$, $\Delta := \Delta_1$ と書く．$0 < r, s < 1$ に対して

$$H_{r,s} := (\Delta_r \times \Delta) \cup \big(\Delta \times (\Delta \setminus \overline{\Delta_s})\big) \subset \mathbb{C}^2.$$

定理 (Hartogs 拡張)

任意の正則関数 $f\colon H_{r,s} \to \mathbb{C}$ は，一意的に Δ^2 上の正則関数 $\widetilde{f}$ へ延長する． □

延長は，次の Cauchy 積分で与えられる：

$$\widetilde{f}(z,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(z,\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta, \qquad \max\{s, |w|\} < \rho < 1.$$

$|z| < r$ では Cauchy の公式で元の f と一致する．領域の切り口を動かして，この延長を眺めよう．

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の領域を，どう眺めるか

二つの複素平面を並べ，z を動かして

$$\Omega_z := \{w \in \mathbb{C} \mid (z, w) \in \Omega\}$$

の変化を追う．西野利雄氏は，岡潔がこうした図を「緑陰図」と名づけ，

> 「毎日毎日それを描いて眺めておられた」

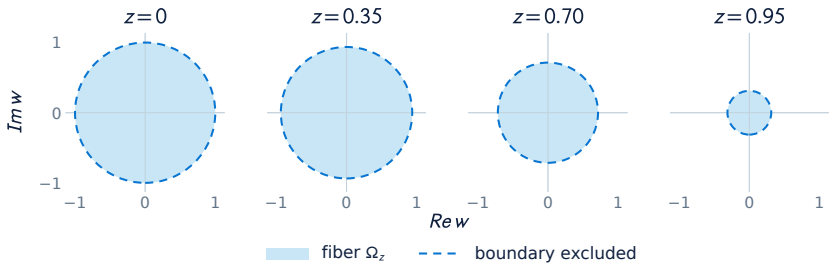
と記している．

開球 $\longrightarrow$ 双円板 $\longrightarrow$ Hartogs 図形
左で z を動かし，右の w 平面に現れる切り口を比べる．

西野利雄「岡潔先生の数学」『数学』33(2), 1981, pp. 171–178, 特に pp. 174–175. doi:10.11429/sugaku1947.33.171

開球：切り口の円板が縮む

$$B(0,1)=\{(z,w):|z|^2+|w|^2<1\},\qquad B(0,1)_z=\{\,|w|<\sqrt{1-|z|^2}\,\}\quad(|z|<1).$$

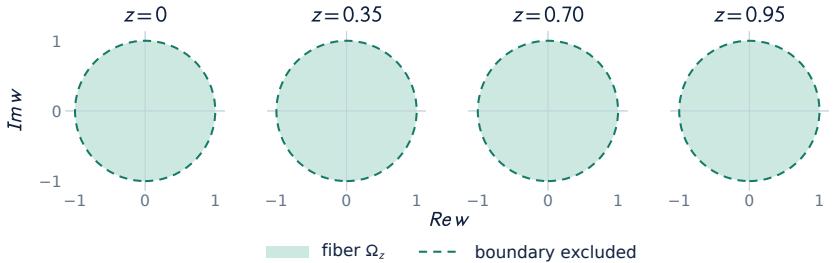


- 左の z を原点から外へ動かすと, 右の円板が小さくなる.
- z の偏角を変えても, 同じ $|z|$ なら同じ切り口.

講義用固定例 ryokuinzu / lecture-ball. 破線は領域に含まれない境界.
図の操作：HTML 版の同じページを開く

双円板：切り口が変わらない

$$\Delta^2 = \{(z,w) : |z| < 1,\ |w| < 1\}, \qquad (\Delta^2)_z = \Delta \quad (|z| < 1).$$

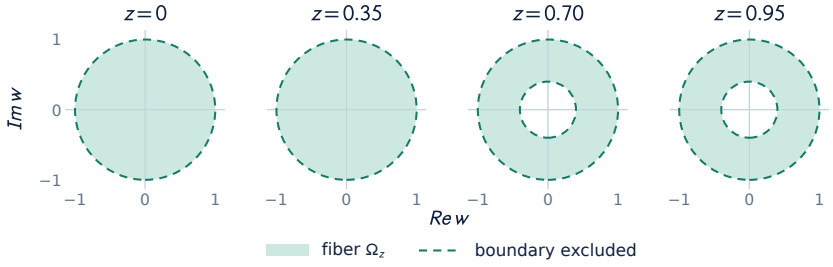


- z を動かしても, w の切り口は同じ単位円板.
- 次の Hartogs 図形が埋まる先は, この双円板.

講義用固定例 ryokuinzu / lecture-polydisc. 破線は領域に含まれない境界.
図の操作：HTML 版の同じページを開く

Hartogs 図形：円板から環状領域へ

$$H_{.48,.40} = (\Delta_{.48} \times \Delta) \cup \big(\Delta \times \{.40 < |w| < 1\}\big).$$



$|z| < .48$ では全円板，$.48 \le |z| < 1$ では環状領域．
$.40 < \rho < 1$ の円周で Cauchy 積分を作り，中央での一致から全体へ進む．

すべての正則関数が Δ^2 へ延びるので，正則領域ではない．

固定例 ryokuinzu / n18．破線は領域に含まれない境界．
図の操作：HTML 版の同じページを開く

接束から始める：接ベクトルの複素化

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とし, $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$ とおく.

定義

実 $2n$ 次元多様体としての接束を $T\Omega$ と書く. その各ファイバーは

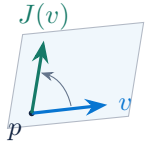
$$T_p\Omega = \bigoplus_{j=1}^{n} \left(\mathbb{R}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \oplus \mathbb{R}\, \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_p \right).$$

その複素化を $T^{\mathbb{C}}\Omega := T\Omega \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とする. □

実接束上の複素構造 J を

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定める. $J^2 = -\mathrm{id}$ であり, $T^{\mathbb{C}}\Omega$ へ複素線形に延長する.



$T_p\Omega$ 内の図

接束の型分解

定義

各 $p \in \Omega$ で, 次のベクトル場を用いて $T_p^{\mathbb{C}}\Omega$ の部分空間を定める.

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$T_p^{1,0}\Omega := \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_p, \qquad T_p^{0,1}\Omega := \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}\left.\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right|_p.$$

これらをファイバーとする部分束を $T^{1,0}\Omega$, $T^{0,1}\Omega$ と書く. □

$$T^{\mathbb{C}}\Omega = T^{1,0}\Omega \oplus T^{0,1}\Omega.$$

右辺の各項は, それぞれ J の $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ 固有空間からなる複素階数 n の部分束. 例えば $w \in T_p^{1,0}\Omega$ は $w = \sum_{j=1}^{n} a_j \left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_p$ と書く接ベクトルである.

実超曲面と複素接空間

$M = \partial D \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$ とし, $p \in M$ の近傍 U で

$$D \cap U = \{\rho < 0\}, \qquad M \cap U = \{\rho = 0\}, \qquad d\rho \neq 0 \quad \text{on } M \cap U$$

と表す. ρ は実 C^2 関数であり, $T_pM = \ker(d\rho)_p$.

定義

$$T_p^{1,0}M := \{w \in T_p^{1,0}\Omega \mid \langle (\partial\rho)_p, w\rangle = 0\} = (T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cap T_p^{1,0}\Omega.$$

これを M の複素接空間といい, $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{1,0}M = n-1$. □

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \left.\frac{\partial}{\partial z_j}\right|_p \in T_p^{1,0}M \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(p) a_j = 0.$$

実接空間内の $H_pM := T_pM \cap J(T_pM)$ と, $v \mapsto v - \sqrt{-1}J(v)$ によって複素線形に同型になる.

境界の Levi 形式

定義

$w = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, $w' = \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial z_k} \in T^{1,0}_p M$ に対し

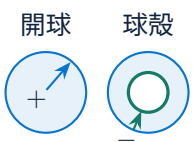
$$H_{M,p}(\rho)(w, w') := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) a_j \overline{b_k}$$

を, ρ に関する M の Levi 形式という. □

例 (開球と球殻, $n \geq 2$)

開球では $\rho(z) = |z|^2 - 1$ により, $H_{M,p}(\rho)(w, w) = \sum_j |a_j|^2 > 0$ $(w \neq 0)$.

球殻 $\{a < |z| < 1\}$ $(0 < a < 1)$ の内側では $\rho = a^2 - |z|^2$ と取り, Levi 形式は $-\sum_j |a_j|^2$. □



境界での Levi 形式の符号（断面図）

境界の形を正則座標で見る

$n \geq 2$ とし, $p \in \partial D$ で $D = \{\rho < 0\}$ の側を固定する.

事実 (境界の normal form, 証明は省略)

p を原点とする正則座標 $(z', w) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, w)$ を取ると, 十分小さい近傍で

$$D = \left\{ \operatorname{Im} w > \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j |z_j|^2 + R(z', \operatorname{Re} w) \right\}, \qquad R(z', u) = o(|z'|^2 + |u|^2).$$

λ_j の正・負・零の個数は, 境界の Levi 形式の固有値のそれと一致する. □

- z' は複素接方向, w は複素法線方向の座標.
- $\{w = 0\}$ に沿った二次の曲がり方を, λ_j が表す.
- 領域の側を固定して, 正のときと負のときを比較する.

正の Levi 形式：境界で発散する局所正則関数

命題

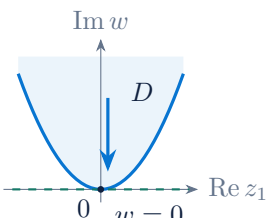
$\lambda_j > 0$ がすべての j で成り立つなら, 原点の十分小さな近傍 U で

$$\{w = 0\} \cap \overline{D} \cap U = \{0\}.$$

したがって $F(z', w) = 1/w$ は $D \cap U$ 上で正則であり, $D \cap U$ 内から原点へ近づくと $|F| \to +\infty$. □

$F = 1/w$ は原点を越えて正則には延長できない.
$w = 0$ という正則超曲面が, 領域を局所的に支えている.

ここで作った F は局所関数である. 元の座標では, $\{w = 0\}$ は一般に線形な超平面とは限らない.



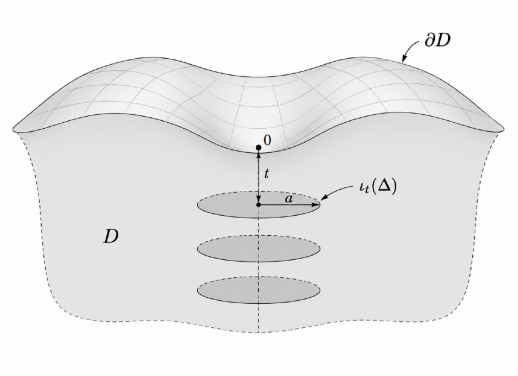
二次近似の実 2 次元断面

負の Levi 方向：解析円板を境界へ寄せる

$\lambda_1 < 0$ とする．十分小さい $a, t_0 > 0$ を固定して

$$\iota_t(\zeta) = (a\zeta, 0, \dots, 0, \sqrt{-1}t), \qquad |\zeta| \le 1, \quad 0 < t \le t_0$$

とおく．$\iota_t(\Delta)$ を解析円板と呼ぶ．



- $t > 0$ では閉円板全体が D 内にある．
- $t \downarrow 0$ で中心は境界点 0 に近づく．
- 境界円周は，$t = 0$ でも D の内側に残る．

図では領域の内側を下向きに描いている．

最大値原理：円周の値が中心の値を支配する

$t = 0$ でも ι_t を同じ式で定める．境界円周をすべて集めた集合

$$\Gamma := \bigcup_{0 \le t \le t_0} \iota_t(\partial\Delta)$$

は，D 内のコンパクト集合である．

命題

$F \in \mathcal{O}_D(D)$ と $0 < t \le t_0$ に対し，一変数の正則関数 $F \circ \iota_t$ に最大値原理を使うと

$$|F(\iota_t(0))| \le \max_{|\zeta|=1} |F(\iota_t(\zeta))| \le \sup_{\Gamma} |F| < +\infty.$$

□

中心は境界へ近づくが，F の値はこの中心列に沿って一様に有界．

上界は F に依存するが，t には依存しない．この評価を，後で正則凸性と結びつける．

Cauchy の公式で境界の外へ

定理 (負の Levi 方向による局所正則延長)

$D \subset \mathbb{C}^n$ の C^2 境界点 p で, 境界の Levi 形式が負の固有値を持つとする. p の近傍 U が存在し, 任意の $F \in \mathcal{O}_D(D)$ に対して $\widetilde{F} \in \mathcal{O}_U(U)$ が存在し, $D \cap U$ 上で $\widetilde{F} = F$. □

$z'' = (z_2, \ldots, z_{n-1})$ とおく. z'', w を 0 の周りで少し動かしても, 積分路は D 内にある.

$$\widetilde{F}(z_1, z'', w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\eta|=a} \frac{F(\eta, z'', w)}{\eta - z_1}\, d\eta, \qquad |z_1| < a.$$

右辺は境界をまたぐ近傍で正則. 円板全体が D 内にある開集合では Cauchy の公式で F と一致し, $D \cap U$ を連結に選べば, 一致の定理でそこ全体の一致を得る.

正則領域であるためには, 境界の Levi 形式に負の方向があってはならない.

Levi 擬凸性：固有値の符号を見る

定義

領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ が滑らかな境界を持つとする．$D = \{\rho < 0\}$ の側を固定し，各 $p \in \partial D$ で

- $H_{\partial D,p}(\rho)$ の固有値がすべて ≥ 0 なら Levi 擬凸，
- すべて > 0 なら強 Levi 擬凸

という．固有値は複素接空間上での $n-1$ 個を考える． □

命題

同じ側を定める別の定義関数 $\widetilde{\rho} = a\rho$（$a > 0$）に対して

$$H_{M,p}(\widetilde{\rho}) = a(p) H_{M,p}(\rho).$$

したがって，固有値の正・負・零の個数は定義関数によらない． □

双円板や Hartogs 図形のように角のある領域も，後で皆位関数を用いて扱う．

多重劣調和関数：すべての複素直線で見る

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする.

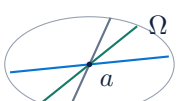
定義

上半連続関数 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が多重劣調和（plurisubharmonic, psh）であるとは, 任意の $a \in \mathbb{C}^n$ と $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対し

$$w \longmapsto \varphi(a + w\xi)$$

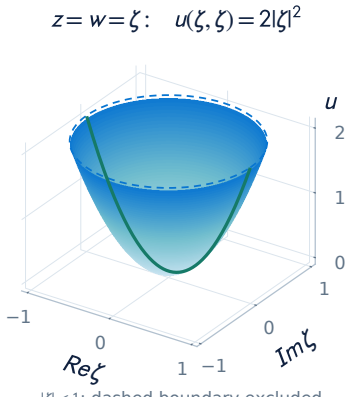
が $\{w \in \mathbb{C} \mid a + w\xi \in \Omega\}$ 上で劣調和であることをいう. その全体を $\mathrm{Psh}(\Omega)$ と書く. 恒等的に $-\infty$ の関数も, 連結成分ごとに許す. □

円周平均の不等式を, すべての複素方向について要求する. 次は, 複素直線の方向を変えて観察する.



複素直線の模式図

どの複素直線にも上向きに曲がる例



固定例 psh / N01. 座標方向と斜めの複素円板を比べる.

図の操作：HTML 版の同じページを開く

$$u(z,w) = |z|^2 + |w|^2.$$

複素直線 $(z,w) = a + \zeta\xi$ へ制限すると

$$u(a+\zeta\xi) = |\xi|^2|\zeta|^2 + 2\,\mathrm{Re}(c\zeta) + |a|^2$$

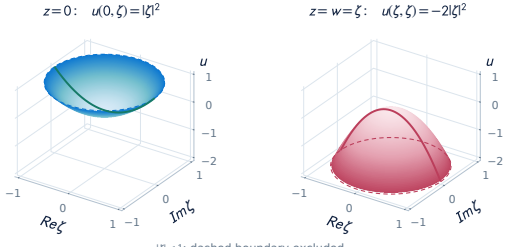
ここで $c = \xi_1\overline{a_1} + \xi_2\overline{a_2}$.

どの方向 $\xi \neq 0$ でも，正の二次項が現れる.

図は原点を通る対角線 $z = w = \zeta$ の切断.

座標方向だけでは見落とす非例

$$u(z,w) = |z|^2 + |w|^2 - 4\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$



座標方向の切断はすべて狭義劣調和．しかし $z = w = \zeta$ 上では $u = -2|\zeta|^2$.

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{固有値 } 3,\ -1.$$

固定例 psh / A03. 座標方向だけでは, 多重劣調和性を判定できない.
図の操作：HTML 版の同じページを開く

C^2 の psh と複素 Hessian

定理

実 C^2 関数 φ に対して, 次は同値である.

$$\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad H(\varphi) := \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right)_{j,k} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{-1} \partial \overline{\partial} \varphi \geq 0.$$

□

実際, $\varphi(a + w\xi)$ の w に関する複素 Hessian は

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \varphi(a + w\xi) \Big|_{w=0} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) \xi_j \overline{\xi_k}.$$

定義

$\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ が狭義 psh とは, 各点の近くである $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi - \varepsilon |z|^2$ が psh となること. C^2 のときは $H(\varphi) > 0$ と同値である. □

psh の例を増やす

例

関数	性質
$\lvert z\rvert^2 + \lvert w\rvert^2$	狭義 psh
$\mathrm{Re}\,(zw)$	多重調和：$H(\varphi) = 0$
$\lvert w - z^2\rvert^2$	psh, 狭義ではない
$\max\{\lvert z\rvert^2, \lvert w\rvert^2\}$	連続 psh, 一般に C^2 ではない
$\log\bigl(\sum_{\nu=1}^{m} \lvert f_\nu\rvert^2\bigr)$	f_ν が正則なら psh

最後の例は, 共通零点で値を $-\infty$ とする. □

命題

有限個の psh 関数の最大・和, 正の定数倍, psh 関数列の減少極限は psh である. □

一般の psh：正の $(1,1)$-カレント

定理

領域 Ω 上の $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$, $\varphi \not\equiv -\infty$ は $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属する. 実 L^1_{loc} 同値類 u について

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ は一意の psh 代表元を持つ.}$$

□

カレントでは, 微分形式の係数を超函数まで広げて扱う. 今の $(1,1)$-カレントの正性は, 任意の定数ベクトル $\xi \in \mathbb{C}^n$ と $0 \leq \chi \in C^\infty_c(\Omega)$ に対し

$$\sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_k} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}, \chi \right\rangle \geq 0$$

と読む.

滑らかでない例も, 複素 Hessian の正性で統一して扱える.

正則凸性と皆位関数

定義 (正則凸性)

コンパクト集合 $\Gamma \subset \Omega$ の正則凸包を

$$\widehat{\Gamma}_\Omega := \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq \sup_\Gamma |f| \text{ for every } f \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)\}$$

とする. これが任意の Γ に対してコンパクトなら, Ω は正則凸であるという. □

負の Levi 方向の例では, $\iota_t(0) \in \widehat{\Gamma}_D$ なのに $\iota_t(0) \to 0 \in \partial D$. したがって $\widehat{\Gamma}_D$ はコンパクトでない.

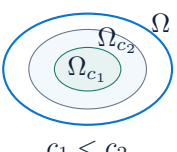
定義 (皆位関数)

連続関数 $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ が皆位関数であるとは, すべての $c \in \mathbb{R}$ で

$$\Omega_c := \{x \in \Omega \mid \rho(x) < c\} \Subset \Omega$$

となることをいう. □

$A \Subset \Omega$ は, A の閉包が Ω 内でコンパクトであること.



岡の定理：擬凸性の同値な特徴づけ

$\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ を C^∞ 境界を持つ領域とする.

定理 (Levi 問題の解決：岡)

次は同値である. (5)⇒(1) が Levi 問題の核心.

1. Ω は正則領域.
2. Ω は正則凸.
3. Ω は C^∞ 級 psh 皆位関数を持つ.
4. Ω は C^∞ 級の狭義 psh 皆位関数を持つ.
5. $\partial\Omega$ は, Ω の側に関して Levi 擬凸.

□

定義

これらの同値な条件を満たす Ω を擬凸領域という. 境界が滑らかでない場合にも, 皆位関数による条件を使って定義する. □

境界へ近づくと発散する psh 関数

例 (開球と多重円板)

$$B(0,1): \quad \rho_B(z) = -\log(1-|z|^2), \qquad \Delta^n: \quad \rho_{\Delta^n}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \log(1-|z_j|^2).$$

どちらも C^∞ 級の狭義 psh 皆位関数である. □

定理 (岡の補題)

有界な擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ に対し, 境界までの距離を $\delta_\Omega(z) := \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ とおく. このとき $-\log \delta_\Omega$ は連続な psh 皆位関数である. □

皆位関数は領域の内部で考える. 境界へ近づくと $+\infty$ に発散する.

複素多様体：局所座標を正則に貼り合わせる

定義

Hausdorff・第二可算な空間 X に, 開被覆 $\{U_\alpha\}$ と $\mathbb{C}^n$ の開集合への同相写像

$$z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

が与えられ, 重なり上の座標変換 $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ が双正則であるとき, X を複素 n 次元多様体という. □

例

$\mathbb{C}^n$ の領域, Riemann 面, Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$, それらの直積. □

命題

psh 性は正則写像による引き戻しで保たれる. したがって, 局所座標ごとに psh であることを要求して $\mathrm{Psh}(X)$ を定義できる. □

関数の強 1-凸性と弱 1-凸性

定義

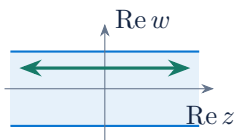
複素多様体上の実 C^2 関数 φ について, $q = 1$ の場合は

$$\begin{aligned} \text{strongly 1-convex at } x &\iff H(\varphi)(x) > 0, \\ \text{weakly 1-convex at } x &\iff H(\varphi)(x) \geq 0. \end{aligned}$$

すべての点で要求すると, 狭義 psh 性と psh 性にそれぞれ対応する. □

例

$\mathbb{C}^n$ 上の $|z|^2$ は狭義 psh な皆位関数である. 一方, $\mathbb{C}^2$ 上の $\varphi(z, w) = |w|^2$ は psh だが, $c > 0$ に対し $\{\varphi < c\} = \mathbb{C} \times \Delta_{\sqrt{c}}$ は相対コンパクトでなく, 皆位関数ではない. □



実 2 次元の切り口

strongly 1-convex と weakly 1-complete

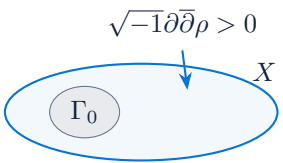
複素多様体 X が持つ C^∞ 級の皆位関数 $\rho : X \to \mathbb{R}$ を考える.

定義

- strongly 1-convex：ある ρ とコンパクト集合 $\Gamma_0 \subset X$ が存在し, $X \setminus \Gamma_0$ 上で $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\rho > 0$.
- weakly 1-complete：ある ρ が存在し, X 全体で $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\rho \geq 0$.
- strongly 1-complete：ある ρ が存在し, X 全体で $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\rho > 0$.

□

「正性の強さ」と「正性が成立する場所」を指定する. どの場合にも, 皆位関数であることを要求する.



strongly 1-convex の模式図

例：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ は weakly 1-complete

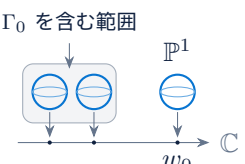
例

$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ に対し, $\rho(p, w) = |w|^2$ とおく. $c > 0$ なら $\{\rho < c\} = \mathbb{P}^1 \times \Delta_{\sqrt{c}}$ は相対コンパクト. $c \leq 0$ なら空である. 局所座標では $H(\rho) = \mathrm{diag}(0, 1) \geq 0$ なので, ρ は C^∞ 級 psh 皆位関数である. □

命題

X は strongly 1-convex ではない. □

コンパクト集合 Γ_0 があっても, $|w_0|$ を十分大きく取れば $\mathbb{P}^1 \times \{w_0\}$ は Γ_0 と交わらない. そこで狭義 psh な皆位関数をこのコンパクト曲線に制限すると, 最大値原理に反する.



今日の到達点

- 劣調和：円周平均, $\Delta u \leq 0$, 超函数の意味での正性.
- 多重劣調和：すべての複素直線, $H(\varphi) \geq 0$, $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$.
- Hartogs 現象と正則延長：負の Levi 方向がある境界点では, すべての正則関数が局所的に延びる.
- $\mathbb{C}^n$ の擬凸性：正則領域・皆位関数・境界の Levi 形式の同値性.
- 多様体上では, strongly 1-convex / weakly 1-complete を準備した.

問い

strongly 1-complete や strongly 1-convex と, weakly 1-complete では, 空間の幾何にどのような違いがあるだろうか？ □

Project Holomorphonautica のウェブページ

ウェブページ

https://tkoike.com/proj_holomorphonautica/index.html

HTML 版では、このスライドでウェブページを閲覧できます。