私の講義スライド

定義・定理と、図を動かす観察

氏名
所属

今日の問い

数式による定義と、図から得る感覚を結びつけます。

- 平均値と比べて、関数の値はどのように振る舞うか。
- その性質を、微分を使って判定できるか。
- 鞍型の関数は、劣調和になり得るか。

劣調和関数

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とする。

定義

上半連続関数 $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ が $u \not\equiv -\infty$ であり、任意の $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ に対して

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

を満たすとき、u は劣調和であるという。

図では主に連続な例を扱うが、定義では連続性を仮定しない。

滑らかな場合の判定

定理

$u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ が劣調和であることと $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \geq 0$ は同値である。

例

$u(x+iy) = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ について

$$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = -2, \qquad \Delta u = 0.$$

鞍型のグラフでも、調和であり劣調和である。

鞍型の関数を観察する

例

$u(z) = \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$。

実軸上では上向き、虚軸上では下向きの放物線になる。

それでも任意の円で、中心の値と円周平均は一致する。

HTML 版では、切断や視点を動かしてこの例を観察できます。

対話画面は HTML 版で開きます

次の問いへ

- 劣調和性を、円周平均と Laplacian の二つの視点で見た。
- グラフがどの実方向にも凸、という条件とは異なる。

問い

$\mathbb{C}^n$ では、どの切断に注目すればよいだろうか。